Fachdossier und Musterpüfung
Aufnahmeprüfung Niveau I an die Pädagogische Hochschule Zug
Anforderungen im Fachbereich Mathematik

Lernziele

Die Kandidatinnen und Kandidaten

- kennen wichtige Begriffe, Ergebnisse und Methoden aus der Algebra, Geometrie, Stochastik und Analysis;
- beherrschen die Formelsprache sowie wichtige Rechentechniken;
- kennen Problemlösestrategien und wenden sie an;
- erfassen (Sach-)Probleme, mathematisieren und modellieren sie;
- interpretieren Ergebnisse und beurteilen Methoden;
- stellen sich (raum-)geometrische Situationen vor und können sie darstellen;
- setzen (technische) Hilfsmittel zweckmässig ein.

Inhalte

A. Als Grundlage und Voraussetzung beim Kurseintritt dienen die Kenntnisse des Mathematikstoffs, der in der Volksschule bis Ende 9. Klasse im Niveau A der Sekundarstufe I behandelt wird; insbesondere folgende Themen:

Aus der Arithmetik

- Grundbegriffe der Zahlentheorie (Primzahlen, grösster gemeinsamer Teiler [ggT], kleinste gemeinsame Vielfache [kgV] usw.)
- Grundoperationen mit natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen (Bruchrechnen); Potenzrechnen
- Prozent- und Zinsrechnen
- Direkte und indirekte Proportionalität
- Termumformungen, binomische Formeln und Faktorzerlegung
- Funktionsdarstellung in einem kartesischen Koordinatensystem

Aus der Geometrie

- Wichtige geometrische Ortslinien (Kreis, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Mittelparallele)
- Eigenschaften der Figuren Dreieck und Viereck mit allen Spezialfällen; deren Flächeninhalt
- Satz des Pythagoras; Höhensatz
- Umfang und Flächeninhalt eines Kreises
- Ähnlichkeit und Strahlensätze

Ausbildung
Pädagogische Hochschule Zug
Zugerbergstrasse 3, 6300 Zug
T +41 41 727 12 40
www.phzg.ch, info@phzg.ch

B. Für die Zulassungsprüfung werden Kenntnisse und Fähigkeiten in folgenden Stoffbereichen erwartet:

Aus der Mengenlehre

- Definition und Darstellung von Mengen sowie Mengenoperationen (Durchschnitt, Vereinigung, Differenz) verstehen und anwenden können
- Aussagen und deren Verknüpfungen verstehen und anwenden können

Aus der Arithmetik

- Den Aufbau von Zahlsystemen verstehen und in mathematischen Anwendungen nutzen
- Die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen bis zu den reellen Zahlen begründen und die zugehörigen Operationen beherrschen

Aus der Algebra

- Den Logarithmus verstehen, die Logarithmengesetze anwenden und den Logarithmus zur Lösung von Gleichungen einsetzen
- Folgen (in der expliziten und rekursiven Darstellung) und Reihen als wichtiges mathematisches Instrumentarium zum Beispiel für Finanzmathematik einsetzen und mit dem Begriff unendlich umgehen können
- Quadratische Gleichungen lösen und die Lösungsmethode beschreiben

Aus der Analysis

- Den Funktionsbegriff verstehen und verschiedene Darstellungen kennen
- Den Funktionsbegriff an elementaren Funktionen (lineare, quadratische, trigonometrische, Exponentialfunktion) anwenden und für die Lösung praktischer Problemstellungen einsetzen

Aus der Geometrie

- Die Eigenschaften von kongruenten und ähnlichen Figuren kennen und anwenden
- Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis erklären und anwenden
- Trigonometrische Aufgaben in rechtwinkligen Dreiecken lösen
- Die Strahlensätze kennen und anwenden
- Oberflächen- und Volumenberechnungen von prismatischen Körpern, Pyramiden, Kegel und Kugel durchführen
- Kopfgeometrie (Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens)

Aus der Stochastik

- Zahlenmaterial bearbeiten und interpretieren, Masszahlen berechnen: Stichprobe, Klasseneinteilung, absolute und relative Häufigkeit, Histogramme, Boxplot, Mittelwerte (arithmetisches Mittel, Median, Modus), Standardabweichung
- Grundfiguren (Permutation, Variation, Kombination) der Kombinatorik kennen und anwenden
- Elementare Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung lösen mittels:
- Ereignisse, universelle (disjunkte) Ereignisse, Gegenereignis, unabhängige Ereignisse
- Vereinigung und Schnitt von Ereignissen
- Laplace-Experimente
- Bernoulli-Experimente
- mehrstufige Zufallsexperimente
- der Formel für bedingte Wahrscheinlichkeit
- Die Verteilung von Zufallsvariablen bestimmen und damit den Erwartungswert von Zufalls-variablen berechnen; Gewinnerwartung in einem (fairen) Spiel berechnen und interpretieren

Prüfungsmodalitäten und Beurteilungskriterien

Prüfungsform	schriftlich
Zeit	120 Minuten
Hilfsmittel	Taschenrechner TI-30 oder vergleichbarer Typ (nicht grafikfähig, nicht programmierbar); Formelsammlung (z.B. Fundamentum oder vergleichbar, ohne eigene Ergänzung; Ergänzungsblatt von Dozierenden)

Beachten Sie:

- Der Lösungsweg ist genau zu dokumentieren, auch wenn zur Berechnung der Taschenrechner eingesetzt wird.
- Der Notenmassstab ist linear. Es wird mathematisch auf halbe Noten gerundet. Die Note wird gemäss folgender Formel berechnet: Anzahl erreichte Punkte/Maximalpunktzahl * 5 + 1.
- Die Musterprüfung macht deutlich, dass nicht der Stoff aus der Volksschule, wie er unter A (siehe Seite 1) aufgeführt ist, sondern die zusätzlichen Kenntnisse und Fertigkeiten unter B (siehe Seite 2ff.) geprüft werden. Aus der Tatsache, dass einzelne Themen in der Musterprüfung nicht vorkommen, darf aber nicht geschlossen werden, dass sie nicht prüfungsrelevant sind! Die Musterprüfung deckt einen Ausschnitt aus allen möglichen Themen ab. Sie soll Ihnen einen Eindruck vermitteln, wie die Zulassungsprüfung aufgebaut ist.

Empfohlene Literatur

Folgende Bücher enthalten Abschnitte, die die oben erwähnten Inhalte abdecken:
Fundamentum Mathematik und Physik; Formeln, Begriffe, Tabellen, …Orell Füssli, 2021; ISBN 978-3-280-04024-9 (darf an der Prüfung benutzt werden)
Kursteilnehmerinnen und Kursteilnehmer im **Vorbereitungskurs besorgen sich dieses Buch vor Eintritt in den Kurs**, entweder durch eine Sammelbestellung oder von ehemaligen Absolventinnen und Absolventen des Kurses

DUDEN Mathematik, Basiswissen Schule 5. bis 10. Klasse; Buch und CD-ROM in Verbindung mit dem Internet paetec Berlin und Bibliographisches Institut, Mannheim, 2021; ISBN 978-3-411-71045-4

Deller, Gebauer, Zinn; Algebra 1 und 2, nicht mehr lieferbar, aber als E-Book vorhanden (Fachmedien Orell Füssli Verlag)

Elemente der Mathematik, Gymnasiale Oberstufe Nordrhein-Westfalen. 12./13. Schuljahr, Grundkurs; Schroedel, 2022; ISBN 978-3-06-040675-3

Grundlagen der Mathematik für Schweizer Maturitätsschulen, Klett und Balmer, Lambacher Schweizer 7/8, ISNB 978-3-264-83981-4, Lambacher Schweizer 9/10, ISNB 978-3-264-83982-1, 11/12, ISNB 978-3-264-83983-8

Einführung in die Beurteilende Statistik, Schroedel, Braunschweig, ISBN 978-3-507-83214-5

Wahrscheinlichkeitsrechnung und beschreibende Statistik, Compendio Bildungsmedien Zürich, ISBN 978-3-715-59352-4.

PH Zug, 2023, Dzejla Ridic (dzejla.ridic@phzg.ch)

Musterprüfung und Lösung: Siehe folgende Seiten

Musterprüfung

1 Mengen- und Zahlenlehre

Aufgabe 1.1

Kindergarten. [2 P] In einem Kindergarten mit 18 Kindern können 14 bereits ihren Namen schreiben, 10 vorwärts- und 7 rückwärtszählen. 4 Kinder können ihren Namen schreiben, sowie vorwärts- und rückwärtszählen. Halb so viele, wie diejenigen, welche alle drei Fähigkeiten besitzen, können nur vorwärtszählen und ihren Namen schreiben. Ein Kind kann nur vorwärtszählen. Wie viele Kinder können nur ihren Namen schreiben? Stellen Sie die Situation in einem Venn-Diagramm dar und beantworten Sie die Frage.

Aufgabe 1.2

Brüche [2 P] Verwandeln Sie den unendlichen, periodischen Dezimalbruch $2.0\overline{45}$ in einen vollständig gekürzten, gewöhnlichen Bruch. Der ausführliche Rechenweg muss nachvollziehbar sein.

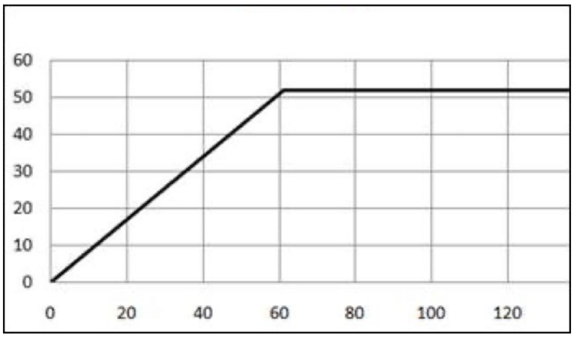
Aufgabe 1.3

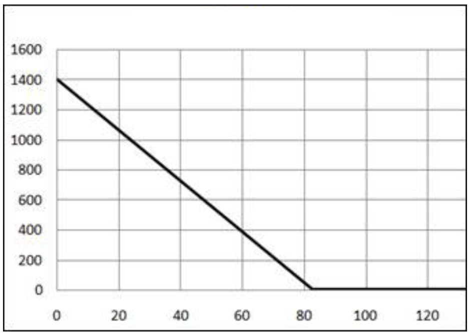
Zahlsysteme [2 P] Addieren Sie die drei Zahlen $(2015)_9$, $(2016)_9$ und $(2017)_9$ im Neunersystem.

2 Funktionen

Aufgabe 2.1

Brunnen. [2 P] Rechts abgebildet sehen Sie einen Brunnen mit den Massen 360 cm x 75 cm x 58 cm (LxBxH). Die beiden Diagramme ordnen einem bestimmten Zeitpunkt die Füllhöhe / Füllmenge zu. Interpretieren Sie diese Diagramme, indem Sie in zwei, drei Sätzen je eine kurze Geschichte schreiben, die zu den jeweiligen Diagrammen passt. Beschriften Sie die Achsen der Diagramme richtig.





Aufgabe 2.2

Familienglück. [2 P] Eine Mutter, ein Vater und ihr Kind machen einen Spaziergang. Einen Kilometer vor dem Zuhause beginnt das Kind zu schreien und möchte seinen Schoppen. Der Vater springt mit der Geschwindigkeit 12 Kilometer pro Stunde nach Hause, schnappt sich ohne zu warten den bereitstehenden Schoppen und springt mit der gleichen Geschwindigkeit zurück. Die Mutter und das Kind laufen ebenfalls mit 3 Kilometer pro Stunde zurück. Bestimmen Sie graphisch, wann das Kind zu seinem Schoppen kommt.

3 Stochastik

Aufgabe 3.1

Spielnachmittag. [1 P] An einer Geburtstagsparty nehmen 5 Mädchen und 3 Knaben teil. 4 Kinder spielen "Schwarzer Peter". Die Gruppe muss zwingend aus Mädchen und Knaben bestehen, das heisst, dass in einer Gruppe jeweils mindestens ein Mädchen und mindestens ein Knabe sein muss. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine solche Gruppe zusammen zu stellen?

Aufgabe 3.2

Beleuchtung. [1 P] In einem Raum gibt es 8 Lampen, die man unabhängig voneinander ein- und ausschalten kann. Wie viele Beleuchtungsarten gibt es, wenn mindestens 6 Lampen brennen sollen?

Aufgabe 3.3

Ausschuss. [1.5 P] Ein Computerhersteller will eine neue Bestückungsmaschine für Platinen kaufen. Die Ausschussrate beträgt 5%. Zur Kontrolle wird ein Probelauf mit 20 Platinen durchgeführt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man höchstens 2 fehlerhafte Platinen?

Aufgabe 3.4

Glücksspiel. [2 P] Petra und Klaus spielen folgendes Spiel. Petra bezahlt Klaus einen Einsatz von Fr. 10.-. Dafür darf sie aus einer Urne mit einer roten, einer gelben und zwei grünen Kugeln zwei Kugeln ohne Zurücklegen ziehen. Zieht sie eine grüne und gelbe (Reihenfolge unwichtig), gewinnt sie einen bestimmten Betrag. Wie viel müsste für eine grüne und eine gelbe (Reihenfolge unwichtig) Kugel ausbezahlt werden, wenn Petra für zwei grüne Kugeln den Betrag Fr. 2.- gewinnt und das Spiel fair sein soll?

Aufgabe 3.5

Kugeln. [2 P] Eine Urne enthält 100 Kugeln. 70 Kugeln bestehen aus dem Material Holz und 30 Kugeln sind aus Kunststoff. 25 der Holzkugeln sind mit der Farbe Rot gestrichen und 45 sind grün. 10 der Kunststoffkugeln sind rot und 20 sind grün. Jemand zieht eine Kugel und sieht, dass sie grün ist. Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kugel der Hand aus Kunststoff ist?

Aufgabe 3.6

IQ. [1 P] Von 13 Studierenden wurde der Intelligenzquotient ermittelt:

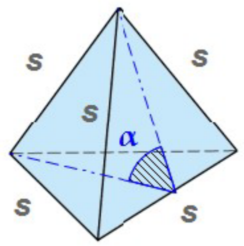
Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
IQ	113	118	134	98	95	109	130	107	116	116	105	123	86

Zeichnen Sie für dieses Zahlenmaterial den Boxplot!

4 Geometrie

Aufgabe 4.1

Tetraeder. [2 P] Die Oberfläche eines regelmässigen Tetraeders wird von 4 kongruenten, gleichseitigen Dreiecken von je s = 10 cm Seitenlänge gebildet. Diese schliessen paarweise den gleichen Winkel α ein. Wie gross ist dieser Winkel?



Aufgabe 4.2

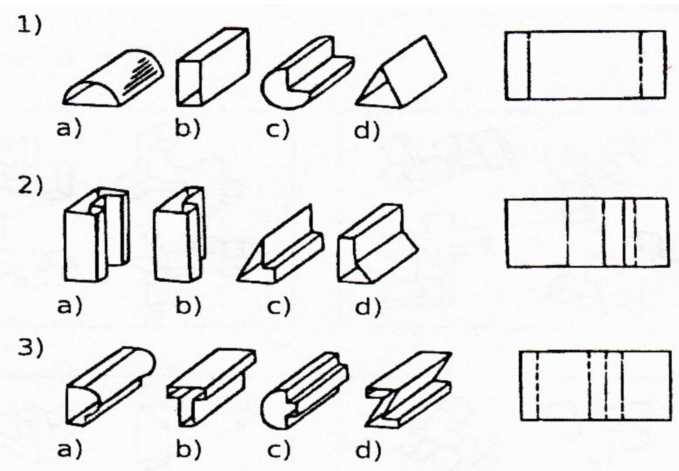
Schatten. [2 P] Die Eine 6 m hohe Mauer wirft einen 7.2 m langen Schatten. Wie gross ist ein Mann, der sich gerade noch ganz im Schatten befindet, wenn er 5.1 m vor der Mauer steht? Fertigen Sie eine Skizze der Situation an und berechnen Sie.

Aufgabe 4.3

Flächeninhalt. [2 P] Kurt behauptet: "Wenn der Radius einer Kugel verdoppelt wird, so verdoppelt sich auch ihr Volumen." Nehmen Sie Stellung.

Aufgabe 4.4

Kopfgeometrie. [1.5 P] Welcher der dargestellten Körper kann aus der Faltvorlage rechts gebildet werden?



5 Folgen und Reihen – Logarithmen – Wachstum - Finanzmathematik

Aufgabe 5.1

Autokauf. [2 P] Antons Auto muss in 8 Jahren ersetzt werden. Darum überweist ab sofort während dieser acht Jahren alle zwei Jahre einen einheitlichen Betrag auf ein Konto, das mit 2% verzinst wird. Das neue Auto wird voraussichtlich 18'500 CHF kosten. Welchen Betrag muss er jeweils Ende Jahr auf das Konto überweisen?

Aufgabe 5.2

Bakterien. [2 P] Bakterien, die sich exponentiell vermehren, werden in einem Labor untersucht. Um 11:30 h waren es 1000 Lebewesen, um 12:00 h 2 000 Lebewesen. Wie gross ist die prozentuale Zunahme pro Stunde?

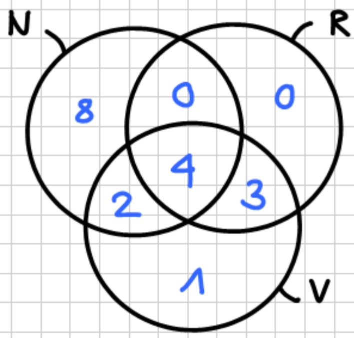
Aufgabe 5.3

Summe. [2 P] Gegeben sei die arithmetische Folge mit $a_1 = 3$ und $a_2 = 4\frac{1}{2}$. Welche Nummer hat das letzte Glied der entsprechenden Reihe, damit die Summe 4620 ergibt?

Musterprüfung – Lösungen

Mengen- und Zahlenlehre

Aufgabe 1.1



$\underline{\underline{\text{8 Kinder}}}$

Aufgabe 1.2

$$x = 2{,}0\overline{45}$$

$$
\begin{array}{lrcl}
 & 1000x & = & 2045{,}\overline{45} \\
\ominus & 10x & = & 20{,}\overline{45} \\
\hline
 & 990x & = & 2025
\end{array}
$$

$$\underline{\underline{x}} = \frac{2025}{990} = \underline{\underline{\frac{405}{198}}}$$

Aufgabe 1.3

$$
\begin{array}{r}
2015 \\
2016 \\
2017 \\
\hline
\underline{\underline{6050}}
\end{array}
$$

Aufgabe 2.1

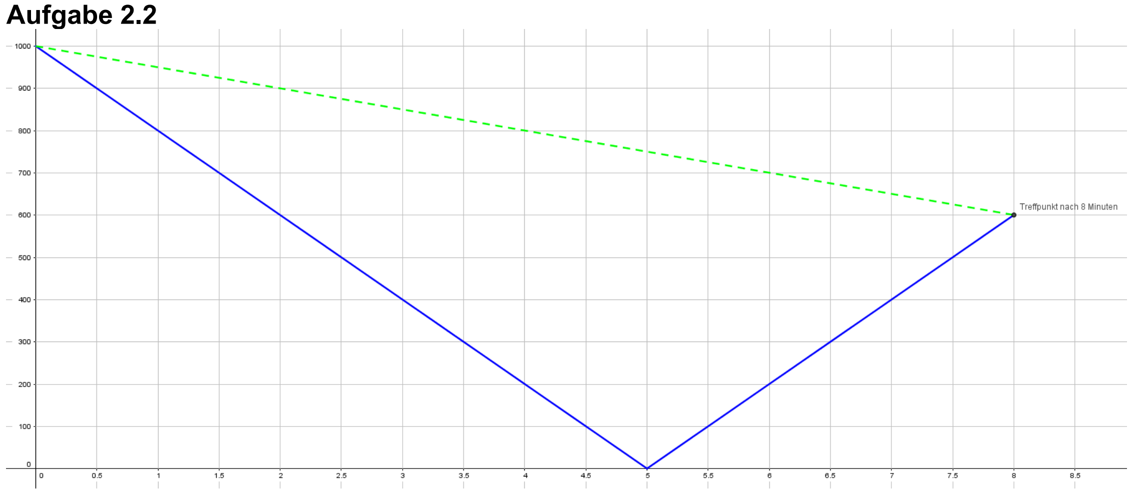
$$V = 36\,dm \cdot 7{,}5\,dm \cdot 5{,}8\,dm = 1566\,dm^3 \mathrel{\hat{=}} 1566\,\ell$$

Beschriftung: x-Achse Zeit in Minuten; y-Achse Füllhöhe in cm (links) / Füllmenge in Liter (rechts)

Graph Links
Der Brunnen ist zunächst leer. Dann regnet es 60 Minuten lang bis zu einer Füllhöhe von ca. 52 cm. Danach hört es auf zu regnen. Die Füllhöhe bleibt konstant.

Graph rechts
Der Brunnen ist fast voll (1400 Liter befinden sich im Brunnen). Der Abfluss wird geöffnet und in 80 Minuten entleert sich der Brunnen. Das sind 17.5 Liter pro Minute, die abfliessen.

Aufgabe 2.2



Der Vater stösst nach 8 Minuten wieder zu Mutter und Kind. Solange muss die Mutter also das Geschrei des Kindes aushalten.

Aufgabe 3.1

alle Mögl. − Anzahl Mögl. ohne ♂ $= \binom{8}{4} - \binom{5}{4} = \underline{\underline{65 \text{ Gruppen}}}$

Aufgabe 3.2

$n = 8$ Reihenfolge unwichtig

$k = 6, 7, 8$ ohne Wiederholung

$\binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = \underline{\underline{37 \text{ Mögl.}}}$

Aufgabe 3.3

$\underline{P(\text{höchstens } 2 \times \ddot{\frown})} = P(0 \times \ddot{\frown}) + P(1 \times \ddot{\frown}) + P(2 \times \ddot{\frown}) =$

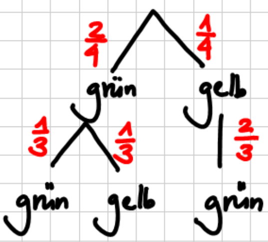
$= \binom{20}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0{,}05^1 \cdot 0{,}95^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{18} \approx$

$\approx 0{,}925 = \underline{\underline{92{,}5\,\%}}$

Aufgabe 3.4

X = Auszahlung pro Spiel für Petra

x_i	x	2
p_i	$\underbrace{\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4}}_{\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}$

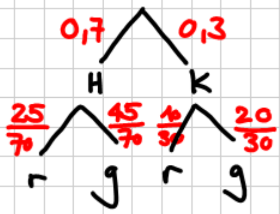


$E(X) = x \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 10 \quad | \cdot 6$

$2x + 2 = 60$

$\underline{\underline{x = 29.-}}$

Aufgabe 3.5



$$\underline{\underline{P(K|g)}} = \frac{P(K\cap g)}{P(g)} = \frac{0{,}3\cdot\frac{20}{30}}{0{,}7\cdot\frac{45}{70}+0{,}3\cdot\frac{20}{30}} \approx$$

$$\approx 0{,}308 = \underline{\underline{30{,}8\,\%}}$$

Aufgabe 3.6

geordnete Liste: 86; 95; 98; 105; 107; 109; 113; 116; 116; 118; 123; 130; 134

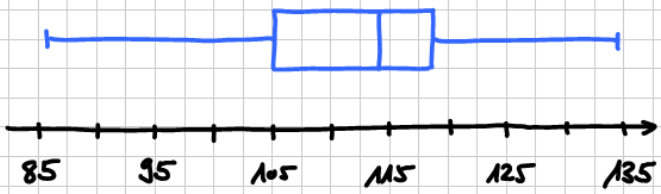
$x_{min} = 86$

$x_{max} = 134$

$x_{med} = q_2 = x_7 = 113$

$q_1 = x_4 = 105$

$q_3 = x_{10} = 118$



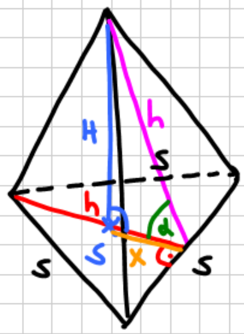
Aufgabe 4.1

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10$$

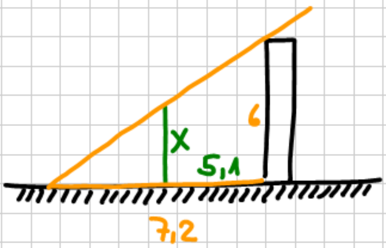
$$x = \frac{1}{3} h = \frac{10\sqrt{3}}{6}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{h}$$

$$\underline{\underline{\alpha}} = \arccos\left(\frac{x}{h}\right) \approx \underline{\underline{70{,}5^\circ}}$$



Aufgabe 4.2



$$\frac{x}{2{,}1} = \frac{6}{7{,}2}$$

$$\underline{\underline{x = 1{,}75\ \text{m}}}$$

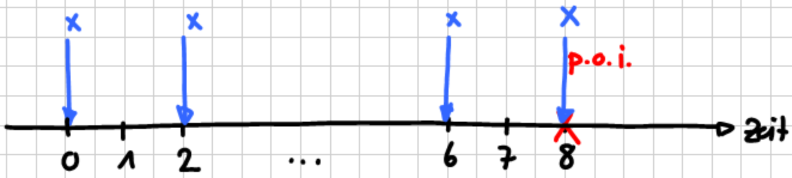
Aufgabe 4.3

Diese Aussage ist falsch. Verdoppelt sich der Radius einer Kugel (der in der Formel in der 3. Potenz vorkommt), so verachtfacht (= 2^3) sich das Volumen der Kugel.

Aufgabe 4.4

1. → c; 2. → c; 3. → a

Aufgabe 5.1



$$\underbrace{x + x \cdot 1{,}02^2 + \ldots + x \cdot 1{,}02^8}_{\text{geom. Reihe}} = 18'500$$

geom. Reihe mit: $a_1 = x$

$q = 1{,}02^2$

$n = 5$

$$x \cdot \frac{1-(1{,}02^2)^5}{1-1.02^2} = 18'500$$

$$\underline{\underline{x \approx 3'412{,}87}}$$

Aufgabe 5.2

$$1000 \cdot b^{0{,}5} = 2000$$

$$b^{0{,}5} = 2$$

$$b = 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{+300\ \%}}$$

Aufgabe 5.3

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$4620 = \frac{n}{2}(3 + 3 + (n-1) \cdot 1.5) \quad | \cdot 2$$

$$9240 = n(4{,}5 + 1{,}5n)$$

$$9240 = 4{,}5n + 1{,}5n^2 \quad | : 1.5$$

$$0 = n^2 + 3n - 6160$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 1 \cdot 6160}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm 157}{2}$$

$$\underline{\underline{n_1 = 77}}$$

$$n_2 = -80 \quad ⚡$$