Mathematische Rahmen

Lerngelegenheiten zur Annäherung an mathematische Konzepte.

Text: Kurt Hess

Die Aussage, dass mathematische Konzepte im Rahmen einer gewissen Logik zu verstehen sind, bringt auf den Punkt, warum in der Mathematik fast «alles im Rahmen» ist.

Was ist und wie wirkt ein Rahmen?

In der Mathematik ist zwar nicht alles, aber vieles in Rahmen, weil Beziehungen in und zwischen Zahlen, Operationen und Formeln «mathematisch logisch» geregelt sind. Beispielsweise lässt sich der Umfang von Rechtecken messen oder als «Länge-plus-Breite-mal-zwei» mit beliebigen Seiten berechnen. Oder zu einer Summe passen verschiedene Plusaufgaben, zu 24 vielleicht 18 + 6 oder 20 + 4. Solche mathematischen Konzepte bieten den Rahmen, innerhalb dessen variiert werden kann.
Es ist naheliegend, «Rahmen» mit Rechtecken, Umfängen und Flächen zu assoziieren, weil sich diese auf offensichtliche Grenzen beziehen. Ein Rahmen begrenzt, grenzt ab, hält zusammen, fokussiert und präsentiert variable Inhalte. Aber eigentlich braucht es keinen physischen Rahmen, damit ein Bild als Bild wahrgenommen, von seiner Umgebung abgegrenzt und das Innenleben interpretiert werden kann. Denn das Betrachten entspricht primär einer subjektiven Annäherung an Mitteilungen, Botschaften und Konzepte. Entsprechend lassen sich auch Metaphern wie «durch eine bestimmte Brille sehen» oder «in ein bestimmtes Licht rücken» deuten.
Der folgende Artikel beschreibt ein Lernsetting zu mathematischen Konzepten (Rahmen) und individuellen Sinnkonstruktionen (Bildinhalte). Weitere Beispiele illustrieren, wie Kinder ihre Umgebung durch verschiedene «Brillen» nach mathematischen Konzepten (Rahmen) absuchen und jeweils «in diesem Licht» persönliche Steckbriefe (Inhalte) entwickeln.

Mathematische Konzepte als Rahmen

Zentrale mathematische Konzepte beziehen sich auf Zahlen, Mengen, Operationen und geometrische Beziehungen. Das Anzahlkonzept enthält beispielsweise Regeln und Fertigkeiten zum Zählen sowie ein Verständnis darüber, was Zählen bedeutet. Eine wesentliche Einsicht bezieht sich auf die 1-zu-1-Korrespondenz, nach welcher jedem Element genau *eine* Zählzahl zugeordnet wird. Weder die Grösse noch die Anordnung der Elemente beeinflusst die Anzahl. Diese Tatsache bildet den Rahmen. Die Tragweite solcher Einsichten zeigt sich, wenn junge Kinder ungeordnete Steine auszählen, vergleichen, verändern oder aufteilen. Darauf bauen die Konzepte der Grundoperationen, des Verdoppelns und Halbierens sowie Orientierungen an Regelmässigkeiten. Die Annäherung an mathematische Konzepte setzt reichhaltige Lernimpulse voraus, damit die Kinder jenen Themen beziehungsweise Konzepten nachgehen können, die sich in der Zone ihrer aktuellen Entwicklung befinden (vgl. Hess, 2016, 2014).

Individuelle Annäherungen

Das folgende Lernsetting ermöglicht individuelle Annäherungen durch freie Tätigkeiten mit sogenannten konstruktiven Materialien (z. B. Glassteine, Spielwürfel, Deckel von PET-Flaschen oder Glacéstängel). Die Kinder verfolgen eigene Ideen, sammeln Erfahrungen, geraten auf Um- und Irrwege, stossen auf Fragen und gelangen zu individuellen Einsichten. Die Zugänge orientieren sich an drei Lernphasen mit unterschiedlichen Freiheitsgraden (vgl. Mathwelt 1, 2018a, b).
In der *1. Phase* spielen beziehungsweise explorieren und erkunden die Kinder frei mit den Materialien. Sie sammeln Erfahrungen, gehen eigenen Bedeutsamkeiten nach und stillen ihre Neugier, ohne bestimmte Aufträge oder Erwartungen. Die Lehrperson lässt sich auf die Handlungs- und Denkweisen ein, gibt individuelle Impulse und stellt Fragen. Die Kinder tauschen sich aus (z. B. in Ausstellungen), zeigen und weisen auf Erschaffenes hin, nehmen Ideen und Feedbacks auf und setzen diese nach eigenem Ermessen um.
In der *2. Phase* erhalten die Kinder bildliche Impulse (vgl. Abb. 1), die sie individuell interpretieren. Vielleicht legen sie Figuren nach, allenfalls mit anderen Farben oder sie variieren ein Muster. Der Explorationsfreude sind keine Grenzen gesetzt. Es gibt kein Richtig oder Falsch, sondern lediglich originale Interpretationen, die im dialogischen Austausch neue Impulse erhalten. In Abbildung 1 erkennt das eine Kind «farbige Sterne», es legt selbst weitere farbige Sterne. Ein anderes deutet «vierfarbige Sterne» und reproduziert nach Vorlage oder

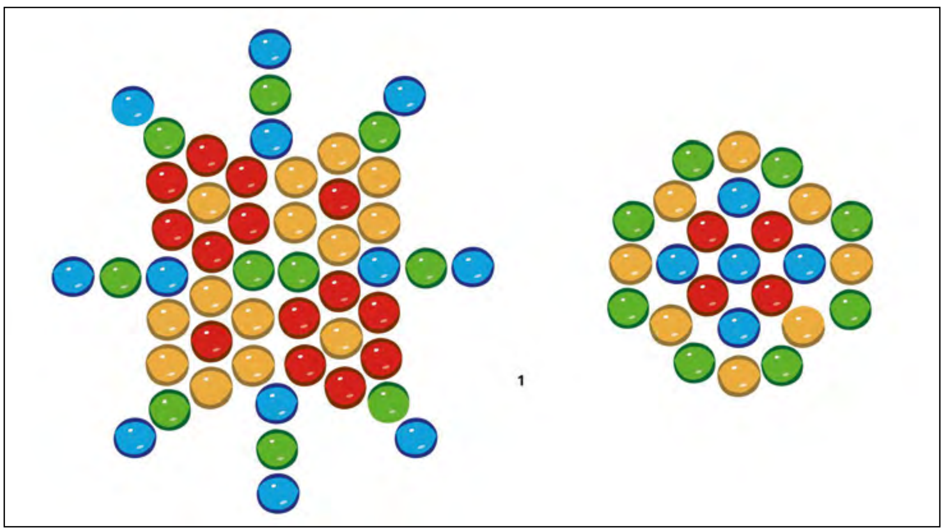

Abbildung 1: Gerahmte mathematische Konzepte (Mathwelt 1, 2018a, S. 26)

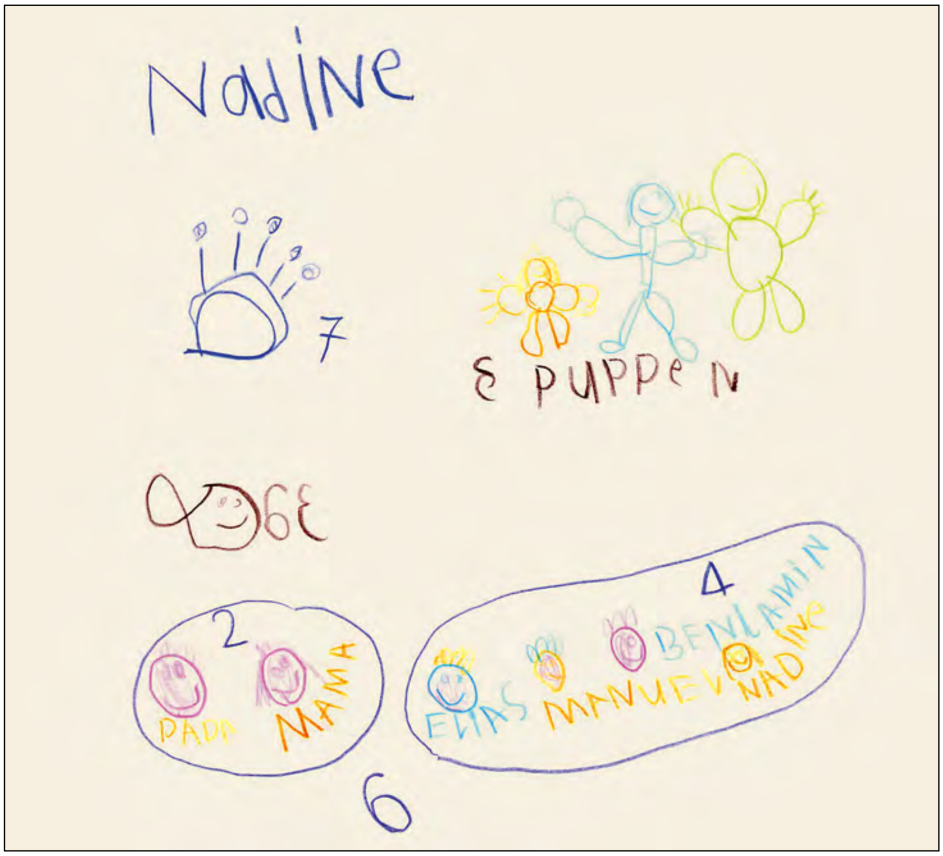

Abbildung 2: Zahlen-Steckbrief von Nadine (Mathwelt 1, 2018a, S. 8)

legt eigene vierfarbige Sternformen. Andere legen, mathematisieren und argumentieren in Richtung Symmetrie, Addition, Multiplikation oder Quadratzahlen (vgl. Stern rechts: 25 Steine). Die Lehrperson beobachtet, fragt nach und gibt Impulse. Vielleicht legt ein Kind einen Stern mit 9 Steinen. Die Lehrperson fragt: «Wie viele sind es?» – Je nach Antwort werden die oben genannten Zählkompetenzen des Kindes erkennbar. Antworten auf Fragen wie «Von welcher Farbe hat es am meisten oder am wenigsten?» geben Aufschluss darüber, ob gleich viele, unterschiedlich angeordnete Steine als «gleich» gelten und ob die Begriffe «mehr, weniger, gleich viele» verfügbar sind (vgl. Lehrplan 21; MA.1.A.1.a). Solche Gespräche sind auch diagnostisch ergiebig, wenn sie entlang fachlich relevanter Kriterien erfolgen (vgl. Hess, 2018, 2021).

In der *3. Phase* erteilt die Lehrperson einzelnen Kindern oder Gruppen Aufträge mit einer grösseren Verbindlichkeit als in den vorigen Lernphasen. Auch diese sind möglichst konkret und öffnen Freiräume für individuelle Erkundungen und Produktionen. Erneut ist der Austausch unter den Kindern wichtig, denn er kann zu neuen Ideen führen. Beispiele: «Lege die gleichen Sterne in anderen Farben» – «Lege Sterne mit 4 Farben, von jeder Farbe gleich viele beziehungsweise unterschiedlich viele». Die entstandene Vielfalt kann neue Aufträge, Fragen oder Diskussionen auslösen und damit wesentlich zu individuellen Annäherungen an mathematische Konzepte beitragen (vgl. Hess, 2014, mit Beispielen zum Download).

Durch verschiedene Brillen sehen und Steckbriefe entwickeln

«Mathwelt 1» bietet weitere Möglichkeiten zur Annäherung an mathematische Konzepte. Die Kinder erforschen ihre Umgebung – je nach aktuellem Thema – mit einer Zähl-, Zahlen-, Muster-, Plus-, Mal-, Vergleichs- oder Kosten-Brille. Sie zeichnen und kommentieren das Gefundene, tauschen es mit anderen aus und nähern sich damit regulären Konzepten an. In einem anderen Lernsetting produzieren die Kinder Steckbriefe über sich selbst und zur Klasse. Sie zeichnen und beschreiben sich selbst mit Zahlen und Anzahlen, nach welchen sie identifizierbar sein sollen. Nadine stellt ihre drei Puppen und ihre drei Brüder dar. Offenbar umfasst die Familie sechs Mitglieder. Dies zeichnet und notiert sie als Summe mit 2 (Mama und Papa) plus 4 (Elias, Manuel, Benjamin und Nadine). Damit weist das Mädchen nicht nur auf ihr Zähl- und Zahlenverständnis hin, sondern auch auf ihr Additionskonzept. Nebenbemerkung: Sie schreibt zur Torte mit 5 Kerzen die Zahl 7. Es ist nicht klar, ob sie 5 oder 7 Jahre zählt (vgl. Abb. 2). Dieser Frage müsste nun in einem Lehr-/Lerndialog nachgegangen werden.

Weitere Lernanlässe

Es gibt noch viele andere Beispiele für Lernanlässe, die mathematische Annäherungen «im Rahmen» auslösen. Die stufendidaktisch bekannten Materialien wie Zauber-, Setz- oder Ordnungskästen oder die Legematerialien von Fröbel und Montessori bieten eine Vielzahl von Anregungen. Konkrete Hinweise finden sich in Mathwelt 1 (2018), allen voran die Lernanlässe mit dem sogenannten Blitz-Blick-Gerät. Der Holzkasten besteht aus zwei Rahmen mit passenden Deckeln und ermöglicht Spiel- und Lernsituationen zum raschen Erfassen, Merken und Vergleichen von Anzahlen und Figuren. Die Kinder nähern sich arithmetischen und geometrischen Konzepten an, indem sie z. B. Anzahlen an 5er- und 10er-Einheiten orientiert darstellen oder Eigenschaften von Figuren vergleichen (vgl. Hess, 2012).

Ein verbindlicher Rahmen für individuelle Annäherungen

Die hier skizzierten Lernanlässe zeigen, warum aus mathematischer Sicht «alles im Rahmen» ist. Aus dem Rahmen fallen lediglich unzulässige Gleichungen und Operationen wie 0 • a = 0 • b oder die Division «durch Null». In der Regel bilden aber mathematische Konzepte einen verbindlichen Rahmen für individuelle Annäherungen.

Lerngelegenheiten mit Bildern, Brillen, Steckbriefen und Blitz-Blick-Geräten sind offensichtliche Rahmen. Etwas abstrakter, aber im gleichen Sinn durch Konzepte gerahmt sind reichhaltige Aufgaben zu beliebigen mathematischen Themen.

Prof. Dr. Kurt Hess
ist Studienleiter und Dozent für Mathematikdidaktik an der PH Zug. Er ist Autor von Mathwelt 1 und zahlreicher Publikationen zum mathematischen Lernen im 1. Zyklus.

>>> Literatur <<<