Broschürenreihe
Unterrichts- und Schulentwicklung konkret

#4

PH Zug

Wenn es harzt und stockt beim Mathelernen

Orientierung an Schlüsselkompetenzen

Kurt Hess

Kanton Zug

Pädagogische Hochschule Zug

Impressum

Autor
Kurt Hess
Professur MaDeL

Redaktion
Kurt Hess, Stefan Hauser, Selma Surbeck

Bilder
Archiv PH Zug

Gestaltung
Tonicmoon GmbH

PH Zug
Zugerbergstrasse 3
6300 Zug
Tel. +41 41 727 12 40
info@phzg.ch
www.phzg.ch

4. Jahrgang

Einleitung

«Es ist frustrierend. Seraina kommt einfach nicht weiter in Mathe, meine Angebote wollen und wollen nicht greifen. Ich frage mich, warum sie keine Fortschritte macht. Wofür soll ich ihr mehr Zeit geben? Was kann ich weglassen? Ich wünsche mir sehr, dass es endlich weitergeht!»

Milena Z., Lehrerin 4. Klasse

Inhaltsverzeichnis

Anliegen und Ausrichtung

Die erste Broschüre der Reihe *Unterrichts- und Schulentwicklung konkret* verweist auf wenige vorschulisch aufzubauende Schlüsselkompetenzen (Hess 2019), die wesentlich über den Erfolg des schulischen Weiterlernens entscheiden. Die vorliegende Ausgabe erweitert dieses Konzept auf den ersten und zweiten Zyklus, also bis Ende der sechsten Klasse. Sie hält dazu an, auf relevante Kompetenzen zu setzen, wenn das Mathelernen harzt und stockt. Ich wünsche allen Lernenden und Lehrenden, passende Schlüssel zu finden!

Diese Broschüre …

- rahmt die ersten beiden Zyklen mit vier generellen Schlüsselkompetenzen (Kapitel 1).
- bezeichnet spezifische Schlüsselkompetenzen für die 2., 4. und 6. Klasse und bietet stufenbezogene Details zum Download an (Kapitel 2).
- klärt die Bedeutung der Handlungsaspekte und gezielter Lern- und Übungsanlässe (vgl. Kapitel 3).
- schlägt wirkungsvolle Interventionen vor (Kapitel 4).
- bietet Check-Listen zu den spezifischen Schlüsselkompetenzen an (Anhang).

Danksagung

Ich wurde von zahlreichen Zuger Lehrpersonen und Schulischen Heilpädagogen/-innen (SHP) angehalten, das Konzept der Schlüsselkompetenzen für den Kindergarten auf die Primarstufe zu erweitern (vgl. Hess 2019). Insbesondere Absolvierende des *CAS Mathematisches Lernen in der Sackgasse?*, Mitglieder der kantonalen Fachgruppe Mathematik, mein Kollege Roland Keller (PH Zürich), die Kolleginnen Kristina Hähn und Simona Geissbühler (PH Zug) sowie Géraldine Rossi und Olivia Bühler (Co-Leiterinnen des SPD Kanton Zug) unterstützten mich beratend. Die eingebrachten Ideen trugen wesentlich zum Gelingen dieser Broschüre bei und begründen folgende Wir-Formulierungen. Allen Genannten sei ein herzliches Dankeschön ausgesprochen!

1. Konzept der Schlüsselkompetenzen

1.1 Wann sind Kinder mathematisch fit?

Die Broschüre ist besser lesbar, wenn wir sagen, was wir vom «Mathe lernen» erwarten. Es ist nicht dasselbe, ob die Kinder (lediglich) richtig rechnen lernen oder ob sie ihr erworbenes Wissen und Verstehen im Alltag und in der Mathematik anwenden sollen. Wir halten uns an die aktuelle Forschung und an den Lehrplan 21, welche zu einem aktiven, sinnstiftenden und mitverantwortlichen Lernen anhalten, das zur inner- und aussermathematischen Anwendung befähigt. Mit anderen Worten: Zahlen und Operationen sollen der Beantwortung mathematischer und weltlicher Fragen dienen.

1.2 Welche Kinder profitieren vom Konzept der Schlüsselkompetenzen?

In Zusammenhang mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen gibt es kein eindeutiges Entweder-oder, sondern es ist von einem Kontinuum mit Abstufungen auszugehen. Wir bieten deshalb Übersichten und Prioritäten für Lernende an, denen zentrale (Schüssel-) Kompetenzen für das Weiterlernen auch nach intensiven Bemühungen fehlen. Solche Kinder sind vielleicht überfordert mit momentanen Aufgaben aus dem Schulbuch, die Fortschritte stagnieren und die Motivation schwindet. Davon grenzen wir Schülerinnen und Schüler in inklusiven Klassen ab, die infolge einer erheblichen kognitiven Beeinträchtigung deutlich andere Ziele verfolgen. Deren Lernangebote orientieren sich weniger am Lehrplan, am Schulbuch oder an Schlüsselkompetenzen als an singulären Bedürfnissen und lebensrelevanten Ausrichtungen.

Manche Kinder sind überfordert mit momentanen Aufgaben aus dem Schulbuch, die Fortschritte stagnieren und die Motivation schwindet.

1.3 Was sind Schlüsselkompetenzen und was nicht?

Das Konzept der Schlüsselkompetenzen bezieht sich hauptsächlich auf den Bereich *Zahl und Variable*, weil dieser einem strikten kumulativen Kompetenzaufbau zu folgen hat. Das bedeutet: Curricular früher angelegte Kompetenzen sind eine notwendige Voraussetzung für später angesetzte. Der Vergleich von Summen setzt bspw. ein gewisses Zähl- und Mengenverständnis voraus. Solange Anzahlen über die visuelle Wirkung wie dem beanspruchten Platz oder der Grösse der Elemente verglichen werden, ist auch kein Vergleichen von Summen möglich (vgl. Abb. 1; Hess 2019).

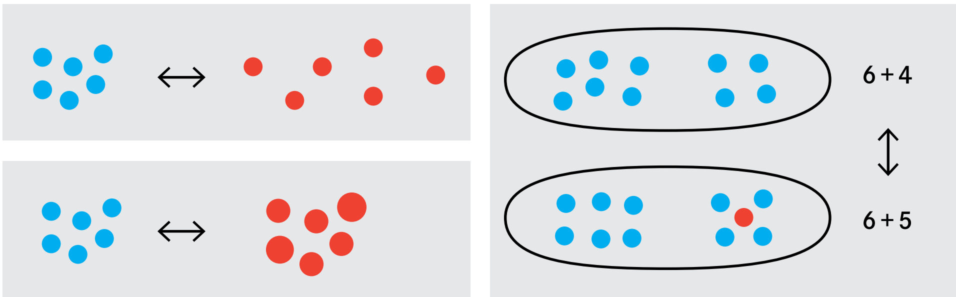


Abbildung 1 Vergleich von Mengen und Summen

Anmerkungen zur Abbildung

links: Vergleich von Mengen nach den Kriterien *beanspruchter Platz* (oben) und *Grösse der Elemente* (unten). Danach wären die roten Anzahlen grösser als die blauen. Dies setzt die Erkenntnis voraus, dass jedem Element genau eine Zahl zugeordnet wird (oder jedem blauen ein rotes Element) und somit weder beanspruchter Platz noch Grösse der Elemente entscheidend sind für «mehr» und «weniger». **rechts:** Die Summen unterscheiden sich lediglich im zweiten Summanden um eins. Von der oberen auf die untere kann geschlossen werden, wenn die Kompetenz «Mengen verändern und vergleichen» verfügbar ist.

Abbildung 2 Von Grundansprüchen und Orientierungspunkten zu Schlüsselkompetenzen

1.4 Wo sind die Schlüsselkompetenzen im Lehrplan 21 verortet?

Der Lehrplan 21 deklariert mit Grundansprüchen diejenigen Kompetenzen, welche alle Lernenden (ausgenommen solche mit angepassten Lernzielen) bis Ende der 2. und Ende der 6. Klasse erreichen sollten. Die Orientierungspunkte geben Anhaltspunkte, wie weit Lernende bis Ende der 4. Klasse sein sollten, damit die «Grundansprüche bis Ende der 6. Klasse» erreichbar bleiben. Einige der Grundansprüche und Orientierungspunkte im Bereich *Zahl und Variable* entsprechen Schlüsselkompetenzen, weil sie notwendig und entscheidend sind für ein erfolgreiches Weiterlernen (vgl. Abb. 2; bunte Ovale).

Auch die Kompetenzbereiche *Form und Raum* (gelbe Ovale) und *Grössen, Funktionen, Daten und Zufall* (hellblaue Ovale) folgen einem gewissen kumulativen Kompetenzaufbau. Entscheidender ist aber deren Beitrag zum Aufbau arithmetischer Kompetenzen und damit auch zum Aufbau arithmetischer Schlüsselkompetenzen (nach unten gerichtete schwarze Pfeile). Es ist also absolut notwendig, beim Aufbau arithmetischer Kompetenzen auch geometrische Zugänge

zu nutzen. Die nach unten gerichteten roten Pfeile deuten an, dass die Schlüsselkompetenzen Wege öffnen für ein erfolgreiches Weiterlernen.
Die Darstellung von Produkten entspricht bspw. dem Variieren von Rechtecken (vgl. Abb. 3). Daraus geht hervor, dass das Konzept der Schlüsselkompetenzen nicht als eine «andere-Grundansprüche-und-Orientierungspunkte-ausblendende-Reduktionsdidaktik» zu verstehen ist und ebenso wäre das Konzept falsch verstanden, wenn dadurch die wichtigen Beiträge bspw. der Geometrie und des Messens negiert würden. Im Gegenteil: Auch eine Fokussierung auf – für das Weiterlernen – entscheidende Kompetenzen soll vielfältige Lernanlässe zu allen Kompetenzbereichen enthalten.

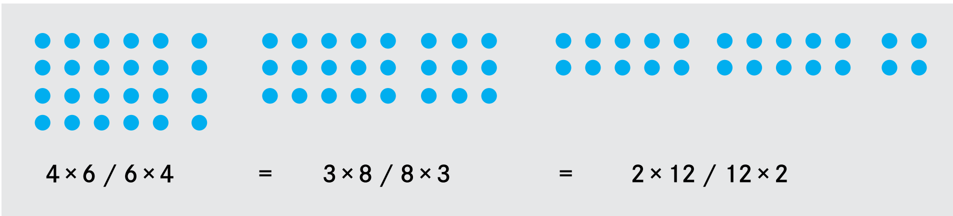


Abbildung 3 Geometrischer Zugang «Rechtecke variieren» trägt zum Verständnis der Multiplikation bei

Innerhalb des Kompetenzbereichs *Zahl und Variable* kann ein Grundanspruch bspw. darin bestehen, flexibel zu zählen (MA.1.A.2.f), vielleicht von 100’002 rückwärts: 100’001, 100’000, 99’999 etc. Allenfalls zählt ein Kind nach 100’000 weiter mit 990, 980, 970 und zeigt damit Unsicherheiten bezüglich Stellenwerten. Ein solcher Grundanspruch gilt nicht als Schlüsselkompetenz, weil das blosse flexible Zählen keine direkte Voraussetzung zum Operieren bildet. Hingegen können solche Lernanlässe wesentlich zu einem «flexiblen Umgang mit Stellenwerten» oder einem «Überschlagen[1] und Kontrollieren von Lösungen» beitragen. In diesem Sinne lautet eine wichtige Botschaft dieser Broschüre, bei jedem Lernanlass die Frage zu stellen, wozu dieser beiträgt.

Gut zu wissen ...

Kinder sind mathematisch fit, wenn sie ihr Wissen und Verstehen vielfältig anwenden, darstellen, vergleichen, erklären und begründen können. Dafür bedarf es vielfältiger Lernangebote, die sich auf alle Grundansprüche inner- und ausserhalb der Arithmetik beziehen. Die Schlüsselkompetenzen orientieren darüber, was aus Lernanlässen zu allen Grundansprüchen und Orientierungspunkten des Lehrplans 21 minimal hervorgehen soll.

1 Überschlagen bedeutet, mit gerundeten Zahlen Ergebnisse abschätzen. Dies setzt ein Stellenwertverständnis voraus. Beispiel: 978 + 514 ≈ 1000 + 500.

1.5 Welche Bedeutung haben generelle Schlüsselkompetenzen?

Wir rahmen den gesamten ersten und zweiten Zyklus mit vier generellen Schlüsselkompetenzen, welche in Kapitel 2 für die 2., 4. und 6. Klasse mit Lehrplanbezügen differenziert und in separaten Dokumenten angeboten werden (Download über QR-Codes auf S. 14).

Abbildung 4 zeigt in der ersten Spalte, dass das Vergleichen eine zentrale Rolle spielt und in der mittleren, dass die Schlüsselkompetenzen über die Handlungsaspekte *Operieren und Benennen, Erforschen und Argumentieren* sowie *Mathematisieren und Darstellen* aufzubauen sind. Der Begriff des Vergleichens fasst also den Kern der Schlüsselkompetenzen und die generelle Funktion von Handlungsaspekten zusammen. Beim Vergleichen von Operationen, Stellenwerten, Grössen oder geometrischen Figuren werden die Lernenden herausgefordert, sich für die eine oder andere Strategie, die eine oder andere Darstellung, den einen oder anderen Lösungsweg oder die eine oder andere Begründung zu entscheiden (vgl. Kap. 3.2). Der Erwerb eines soliden Beziehungswissens bedingt wiederkehrende Herausforderungen zum nachvollziehbaren (begründeten) Wählen und Entscheiden.

> Der Begriff des Vergleichens fasst den Kern der Schlüsselkompetenzen und die generelle Funktion von Handlungsaspekten zusammen.

Die dritte Spalte bezieht sich auf die Anwendung der Schlüsselkompetenzen. Lernende sollen dazu befähigt werden, ihr Beziehungswissen in eigenen Strategien oder beim Kontrollieren, Erklären, Begründen und Interpretieren von Lösungswegen und Ergebnissen anzuwenden. Die letzte Spalte ordnet häufig genannte Schwierigkeiten beim Mathematiklernen den generellen Schlüsselkompetenzen zu (vgl. Hess 2022, S. 232). In der Fachliteratur werden diese unter dem Zahlverständnis (Aspekte des Zahlbegriffs), dem Operations- und Stellenwertverständnis, der Modellierung von Sachsituationen und der Darstellung von Zahlen und Operationen diskutiert.

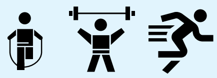
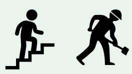
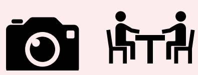
Schlüsselkompetenzen Lernende …	**Erwerb** Lernende …	**Anwendung** Lernende nutzen ihr Beziehungswissen …	**Schwierigkeiten** Lernende fallen auf durch …
vergleichen Anzahlen und Zahlpositionen, Stellenwerte, Grössen und Anteile 	erwerben die Schlüsselkompetenzen über die Handlungsaspekte • Operieren und Benennen • Erforschen und Argumentieren • Mathematisieren und Darstellen (vgl. Kap. 3.2)	• in eigenen Strategien • beim Messen und Schätzen (Überschlagen) • bei der Kontrolle von Ergebnissen • beim Transfer auf andere mathematische und weltliche Situationen	ein ungenügendes Mengen- und Grössenverständnis sowie Überforderungen beim Schätzen und Überschlagen von Ergebnissen
vergleichen Grundoperationen entlang operativer Beziehungen 		• in eigenen Strategien • bei der Kontrolle von Ergebnissen • beim Transfer auf andere mathematische Situationen und bei der Modellierung von Sachaufgaben (vgl. Kap. 2.1.2)	ein rezepthaftes zählendes Rechnen, langsame und umständliche Lösungswege, ein isoliertes Auswendiglernen und Vergessen sowie fehlende Kontrollmöglichkeiten und innermathematische Transferleistungen
vergleichen Daten in Sachsituationen mit Operationen und umgekehrt Operationen mit Sachsituationen und Darstellungen 		• bei der Modellierung von Sachaufgaben • bei der Interpretation von Ergebnissen • bei der Konkretisierung abstrakter Operationen mit Sachsituationen und Darstellungen	in Schwierigkeiten beim Lösen von Text- oder Sachaufgaben
vergleichen mit fachsprachlichen Begriffen und Symbolen 		• beim Erklären und Begründen eigener Strategien und Lösungswege • bei der Kontrolle und Interpretation von Ergebnissen • im dialogischen und kooperativen Austausch	durch fehlende Begrifflichkeiten und Irritationen beim Erklären und Begründen (Argumentieren)

Abbildung 4 Vier generelle Schlüsselkompetenzen für den ersten und zweiten Zyklus

Piktogramme

Das Konzept der Schlüsselkompetenzen hält dazu an, wiederkehrend die Frage zu stellen, wie verschiedene Kompetenzen miteinander zusammenhängen bzw. welche Kompetenz zur Erweiterung einer anderen beiträgt. Ein daraus hervorgehendes Orientierungswissen ist hilfreich, wenn es um die Planung und Umsetzung von Lerneinheiten geht, die verschiedene Zugänge zum Wesentlichen bieten. Solche Zusammenhänge werden in Abbildung 4 mit den Piktogrammen veranschaulicht: Die blaue Zone enthält Fitnessaktivitäten, die zur Kraft, Koordination und Ausdauer beitragen. Das Hauptziel besteht darin, gut vorbereitet Sportarten wie Skifahren, Schwimmen oder Tennis spielen zu können (roter Bereich).

Die sportlichen Aktivitäten im blauen und roten Bereich tragen dazu bei, alltägliche Herausforderungen bzw. situative Anwendungen wie Treppen steigen oder handwerkliche Anstrengungen leichter zu bewältigen. Der Fotoapparat und das Tischgespräch deuten den Austausch von Bedürfnissen, Erfahrungen und den Einbezug anderer Meinungen an.

Gut zu wissen …

Zwischen den generellen Schlüsselkompetenzen bestehen **Abhängigkeiten**:
Die operative Schlüsselkompetenz (rot) steht im Zentrum, die anderen tragen zu den Voraussetzungen (blau), Anwendungen in Sachsituationen (grün) und zum fachsprachlichen Austausch bei (pink). Die **Bedeutung** genereller Schlüsselkompetenzen besteht darin, das mathematische Lernen – insbesondere bei Kindern mit erheblichen Schwierigkeiten – an für das Weiterlernen bedeutsamen Schwerpunkten auszurichten, über Schuljahres- und Zyklengrenzen hinweg!

2. Von generellen zu spezifischen Schlüsselkompetenzen

Die *generellen* Schlüsselkompetenzen werden mit den curricularen Grundansprüchen und Orientierungspunkten für die 2., 4. und 6. Klasse differenziert und folgend als *spezifische* Schlüsselkompetenzen bezeichnet (vgl. D-EDK 2015). Wir stellen diese in ausgelagerten Dokumenten dar, weil sie von stufenspezifischem Interesse sind und die Darstellungsdichte entlasten. Wir führen die Kapitelstruktur weiter, weil die separaten Dokumente verbindlich zu dieser Broschüre gehören. Die Dokumente des Kapitels 2 sind über je einen QR-Code bzw. in der elektronischen Version über eine direkte Verlinkung zugänglich.

2.1 Welche Grundansprüche des ersten Zyklus sind Schlüsselkompetenzen?

2.1.1 Priorisierung von Grundansprüchen aus dem Lehrplan 21 (Tabelle 1)
2.1.2 Spezifisch aufzubauende Schlüsselkompetenzen bis Ende der 2. Klasse

> Download Beilage

2.2 Welche Orientierungspunkte des zweiten Zyklus sind Schlüsselkompetenzen?

2.2.1 Priorisierung von Orientierungspunkten aus dem Lehrplan 21 (Tabelle 2)
2.2.2 Spezifisch aufzubauende Schlüsselkompetenzen bis Ende der 4. Klasse

> Download Beilage

2.3 Welche Grundansprüche des zweiten Zyklus sind Schlüsselkompetenzen?

2.3.1 Priorisierung von Grundansprüchen aus dem Lehrplan 21 (Tabelle 3)
2.3.2 Spezifisch aufzubauende Schlüsselkompetenzen bis Ende der 6. Klasse

> Download Beilage

3. Lernanlässe gezielt und differenziert inszenieren

Die folgenden Kapitel klären, warum die in den Downloads angedeuteten Lernanlässe gezielt auszurichten sind und wie sie sich anreichern und differenzieren lassen.

3.1 Wie inszeniere und differenziere ich ein verstehensorientiertes Lernen?

Verstehen als Annäherung an mathematische Konzepte und flexible Anwendung
Die Frage in der Kapitelüberschrift bedarf der Klärung, was wir mit Verstehen meinen. Wir schlagen vor, das mathematische Verstehen zu definieren als «Beziehungen in und zwischen mathematischen Konzepten kennen, diese verschieden darstellen sowie in Sachsituationen und eigenen Strategien flexibel anwenden». Folglich gelangen Lernende zu einem mathematischen Verstehen, wenn sie sich zentralen Konzepten annähern und deren Beziehungen anwenden (vgl. Hess 2020). Dies muss wiederkehrend und anschaulich erfolgen, weil die Konzepte komplex und beziehungsreich sind und weil das Verstehen von sukzessiven, aktiven und singulären Sinnkonstruktionen abhängt. Die Erkenntnisse beziehen sich im einzelnen Lernanlass vielleicht auf Teilaspekte oder auf die aktuelle Herausforderung. Generalisierbare Bedeutungen entstehen in der Regel nicht von heute auf morgen, sondern in vielfältigen «Millimeter-um-Millimeter-Annäherungsprozessen», bspw. beim «Vergleichen von Mengen, Stellenwerten, Grössen oder Anteilen», beim «produktiven Üben mit systematischen Aufgabenserien» oder beim «Modellieren von Sachaufgaben» (vgl. Kap. 1.5, 2.1.2 und 3.4).

Gut zu wissen …

Schwierigkeiten beim Mathelernen halten dazu an, auf für das Weiterlernen bedeutsame Konzepte und damit auf die vorgeschlagenen Schlüsselkompetenzen zu setzen. Dies, weil dadurch Zeiträume frei werden, um in aller Ruhe und Gelassenheit notwendige Erfahrungen zu sammeln und solide Grundvorstellungen aufzubauen.

Vom Mythos des möglichst langen Handelns und Anschauens
Es mag einleuchten, dass das Kennenlernen von Beziehungen über Handlungs- und Anschauungsmaterialien erfolgen soll. Dazu zwei Anmerkungen: Mathematische Beziehungen müssen auch entlang von Anschauungsmitteln aktiv konstruiert werden, Lernende können diese nicht einfach «sehen» oder «lange anschauen». Dies erfolgt gerne handelnd, in der Hoffnung, dass daraus «automatisch» Erkenntnisse, Einsichten und

Grundvorstellungen hervorgehen. Wir raten davon ab, bei Schwierigkeiten auf die Karte «möglichst häufig und lange Handeln» zu setzen, weil die notwendigen Verinnerlichungsprozesse bei manchen Lernenden alles andere als «von selbst» erfolgen.

Mathematische Beziehungen müssen auch entlang von Anschauungsmitteln aktiv konstruiert werden, Lernende können diese nicht einfach «sehen» oder «lange anschauen».

Gezielte Verinnerlichung mit dem 4-Phasenmodell
Manche Schülerinnen und Schüler brauchen spezifische Anregungen zur aktiven Verinnerlichung von Handlungserfahrungen, bis sie mental bzw. «im Kopf» operieren (können). Wartha und Schulz (2011) schlagen eine *4-phasige Ablösung* vor (vgl. Abb. 10): In der *ersten Phase* übersetzen die Lernenden abstrakte Operationen in materialgestützte Handlungen. Sie legen, schneiden, fügen zusammen bzw. sie stiften aktiv Beziehungen und versprachlichen diese. In der *zweiten Phase* liegt das Material wiederum visuell wahrnehmbar vor, die Beziehungen dürfen aber nicht mehr handelnd erzeugt, sondern müssen «vor dem geistigen Auge» vorgestellt und versprachlicht bzw. einem anderen Kind diktiert werden, bspw. «nimm zwei 100er-Platten, vier 10er-Stangen und drei 1er-Würfel». In der *dritten Phase* sind die Materialien nicht mehr sichtbar, sie befinden sich vielleicht hinter einer Abdeckung, vor einem anderen Kind. Das eine diktiert dem anderen, welche Handlungen es ausführen soll. Die blossen sprachlichen Anweisungen sollen zur mentalen Vorstellungsbildung beitragen. In der *letzten Phase* werden die operativen Beziehungen, die Lösungsschritte und Strategien aus mentalen Grundvorstellungen heraus erzeugt. Letztlich arbeitet das Kind also auf symbolischer Ebene und setzt flexible, mental gesteuerte Strategien um.

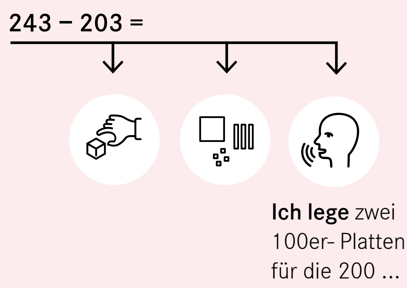
Manche Schülerinnen und Schüler brauchen spezifische Anregungen zur aktiven Verinnerlichung von Handlungserfahrungen, bis sie mental bzw. «im Kopf» operieren (können).

1

Das Kind handelt am geeigneten Material.

Zunächst übersetzt es Rechnungen wie 243 – 203 in Material gestützte Operationshandlungen.

Es beschreibt die mathematische Bedeutung der Handlungen. Das Versprachlichen der Handlungen und der mathematischen Symbole ist zentral.

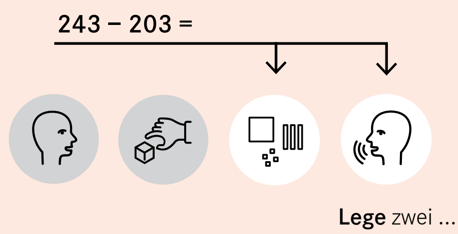


2

Das Kind beschreibt die Materialhandlung *mit* Sicht auf das Material.

Es handelt nicht mehr, sondern schaut lediglich das Material an und diktiert einem anderen Kind, welche Handlungen es ausführen soll.

Es kontrolliert den Handlungsprozess durch Beobachtung, notiert die Rechenschritte und das Ergebnis.



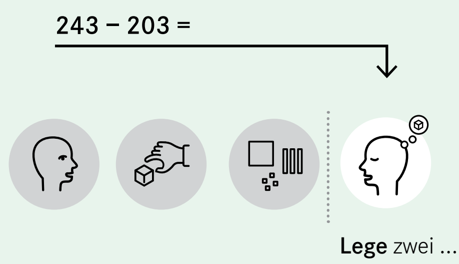
3

Das Kind beschreibt die Materialhandlung *ohne* Sicht auf das Material.

Es handelt nicht und schaut sich das Material nicht mehr an. Dafür diktiert es einem anderen Kind, welche Handlungen es hinter einem Sichtschutz vollziehen soll.

Für die Beschreibung der Handlungen muss es sich den Prozess am Material vorstellen.

Die beiden kontrollieren schliesslich gemeinsam.



4

Das Kind arbeitet auf symbolischer Ebene, wendet verinnerlichte Strategien flexibel an.

Allenfalls werden passende Handlungen mental aktiviert.

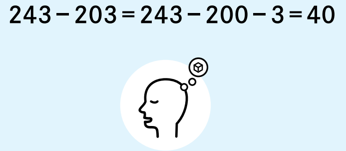


Abbildung 10 4-Phasenmodell (nach Wartha & Schulz 2011)

Aufgaben anreichern, damit sie natürlich differenzieren

Aufgaben zum Lernziel «Verstehen» bedürfen der individuellen Passung. Dies insbesondere, weil die leistungsbezogene Heterogenität in einer durchschnittlichen Jahrgangsklasse zwei bis mehrere Entwicklungsjahre beträgt (vgl. Hess 2022). Aufgaben tragen nur dann zu einem erfolgreichen Lernen bei, wenn jedes Kind einen Einstieg findet und sich individuell herausgefordert fühlt. Die Fachdidaktik empfiehlt deshalb reichhaltige

Aufgaben, die natürlich differenzieren. Beim Gestalten oder beim Texte schaffen braucht es kaum solcher Empfehlungen, weil es eher als natürlich angesehen wird, dass Kinder unterschiedliche Ideen, Farben und Bildkompositionen umsetzen oder den individuellen Wortschatz mit unterschiedlicher orthografischer und grammatikalischer Sicherheit verschriftlichen.

Je nach Voraussetzungen der Lernenden ist es notwendig, geschlossene und formal-abstrakte Vorgaben eines Schulbuchs anzureichern, so dass sie natürlich differenzieren, bspw. durch eingeforderte Darstellungen oder Sachaufgaben (Texte und Bilder) oder durch Einbindung einer Aufgabe wie 5 + 8 in sogenannt «schöne Päckchen» (produktive Übungen) wie 5 + 8, 15 + 18, 25 + 28 etc. Eine weitere Möglichkeit der Anreicherung besteht darin, dass Lernende ein Rätsel mit eigenen Inhalten analog einer gelösten Aufgabe stellen, bspw. eine Zahlenmauer (vgl. Hess 2018).

> Aufgaben tragen nur dann zu einem erfolgreichen Lernen bei, wenn jedes Kind einen Einstieg findet und sich individuell herausgefordert fühlt.

Differenzierung entlang der Dimensionen Abstraktion und Komplexität
Aufgaben lassen sich nicht nur anreichern, sondern auch variieren und zwar bezüglich Abstraktion und Komplexität. Variieren bzw. differenzieren entlang der Abstraktion meint, dass dieselbe Aufgabe mehr oder weniger anschaulich gelöst werden kann, allenfalls mit einem differenzierten Einbezug von Handlungsmaterialien (vgl. 4-Phasenmodell in Abb. 10). Vielleicht lösen gewisse Lernende die produktive Übung 58 + 24, 68 + 34, 78 + 44 formalabstrakt, sie erforschen Zahlbeziehungen, führen die Systematik weiter und erfinden eigene Serien. Andere legen die Summen mit Stangen und Würfeln und gelangen zur Einsicht, dass jeder Summand um 10 wächst und die Summen um 20. Noch einmal andere schauen die Materialien nur noch an und versprachlichen ihre Denkschritte. Weitere Möglichkeiten der Konkretisierung bestehen darin, passende Sachaufgaben zu schreiben bzw. zu zeichnen oder Grafiken zu erstellen.

Die zweite Dimension betrifft die Komplexität der Aufgabendarbietung, von Lösungswegen, Operationen oder Zahlenräumen. Beispielsweise kann eine Sachaufgabe zur gleichen Modellierungskompetenz komplexer oder einfacher aufbereitet sein. Sie lässt sich mit einer sprachlichen Reduktion, mit einer begonnenen Tabelle oder mit der Fragestellung deutlich vereinfachen. Allenfalls stellen Lernende eigene Fragen zur Sachsituation.

Beispiel einer komplexen Aufgabendarbietung und -bearbeitung
Die Mittelstufe Hausen führt ein Schülertheater einmal am Freitagabend und einmal am Samstagmorgen auf. Die Miete des Gemeindesaals kostet am Abend 200 Fr. und eine Eintrittskarte kostet 4 Fr. Am Morgen kostet die Miete des Saals nur 75 Fr. und die Eintrittskarte 3 Fr. Wie viele Karten müssen verkauft werden, damit die Kosten für die Saalmiete bezahlt werden können?

Das Beispiel zeigt eine komplexe Beschreibung und eine Fragestellung, die verschiedene Lösungswege und Lösungen zulässt. Die Komplexität der Aufgabendarbietung lässt sich mindern durch eine sprachliche Entschlackung, in welcher Passagen gestrichen werden, die nicht erforderlich sind für die Modellierung. Die Komplexität der Fragestellung bzw. die Vielfalt an Lösungswegen kann reduziert werden durch spezifische Fragen und diese wiederum durch Hinweise mit Grafiken und Tabellen. Dadurch lässt sich eine gezielte und spezifische bzw. weniger komplexe Suche auslösen.

- Komplexität der Darbietung reduzieren: sprachliche Entschlackung
  Abend-Miete 200 Fr. → Eintrittskarte 4 Fr.
  Morgen-Miete 75 Fr. → Eintrittskarte 3 Fr.

- Komplexität der Such- und Lösungserwartung reduzieren: Spezifische(re) Fragestellungen
  «Wie viele Karten müssen am Morgen verkauft werden, wenn am Vorabend 20, 30, 40, 50 oder 60 Karten verkauft wurden und die Saalmiete gedeckt sein soll?»

- Komplexität spezifischer Fragestellungen reduzieren: Hinweise mit Grafiken und Tabellen

  Eintritte am Abend und am Morgen

Erlös Eintrittskarten insgesamt: 275 Fr.		
Abend je 4 Fr.	30 x 4 Fr.	40 x 4 Fr.
Morgen je 3 Fr.	20 x 3 Fr.	
Total Einnahmen	180 Fr.	

Die Variationen beziehen sich auf dieselbe Modellierungskompetenz, allerdings mit unterschiedlichen Herausforderungen. In arithmetischen Aufgaben lässt sich die Komplexität über *Zahlenräume* (bspw. Dezimalzahlen durch natürliche Zahlen ersetzen oder Zahlenräume einschränken), *Operationen* (anstatt addieren die Summen überschlagen), *Fragestellungen* (reichhaltige, offene Fragen mit spezifischen etappieren) oder über *Erwartungen* an Lösungswege und Lösungen variieren. Auch wenn das mathematische Lernen noch so harzt und stockt, sollten Betroffene wiederkehrend «geschützte» Lernzeiten erhalten, um in aller Ruhe und Gelassenheit ausstehende Schlüsselkompetenzen zu erwerben. In diesem Sinne bietet das Konzept der Schlüsselkompetenzen Hand für zeitliche Spielräume, nicht hingegen für private Abkürzungen wie «Hauptsache das Ergebnis stimmt»!

Gut zu wissen …

Reichhaltige, natürlich differenzierende Lernanlässe ermöglichen unterschiedliche Zugänge und fordern individuell heraus. Sie können konkreter bis abstrakter und einfacher bis komplexer angegangen werden. Das ist für die individuelle Lernplanung und die unterrichtliche Differenzierung bedeutsam.

3.2 Was meint der Lehrplan 21 zum verstehenden Lernen?

Der Fachbereich Mathematik des Lehrplans 21 meint zum verstehenden Lernen, dass sich die Schülerinnen und Schüler entlang der Handlungsaspekte – also beim Operieren, Benennen, Erforschen, Argumentieren, Mathematisieren und Darstellen – den mathematischen Konzepten und operativen Beziehungen annähern sollen (vgl. Abb. 11). Er enthält aber kaum Formulierungen wie «die Lernenden verstehen …», sondern «sie erforschen und argumentieren …» oder «sie stellen … dar». Entsprechend könnten die Handlungsaspekte auch überschrieben werden mit «mathematische Beziehungen kennenlernen», «sich mit diesen beim mathematischen Tun vertraut machen» oder noch verkürzter mit «Verstehen und Anwenden».

Abbildung 11 Struktur des Fachbereichs Mathematik im Lehrplan 21

		Kompetenzbereiche		
		Zahl und Variable	Form und Raum	Grössen, Funktionen, Daten und Zufall
Handlungsaspekte	Operieren und Benennen			
	Erforschen und Argumentieren			
	Mathematisieren und Darstellen			

Vergleichen als oberste Priorität

Die curricularen Vorgaben zur Annäherung an mathematische Konzepte bedürfen erheblicher Zeitressourcen. Diese sind gut investiert, wenn selbst Lernende mit besonderen Bedürfnissen die operativen Beziehungen und das Stellenwertprinzip anwenden können. Dies bedingt, dass nicht nur Lerninhalte, sondern auch die Annäherungen selbst – also die Handlungsaspekte – in den Fokus rücken. Das Konzept der Schlüsselkompetenzen beabsichtigt denn auch, die verfügbaren Lernzeiten für wesentliche Inhalte und vielfältige Zugänge über die Handlungsaspekte zu nutzen (vgl. Kap. 4.1 und 4.2). Dadurch behalten Lehrpersonen und Lernende eher eine Übersicht über Erreichtes und Anstehendes. Eine weitere Möglichkeit, die Komplexität der Handlungsaspekte zu durchdringen, besteht darin, diese durch den Begriff des *Vergleichens* zu ersetzen. Eine solche Annäherung an Inhalte (Kompetenzbereiche) kann bedeuten, dass bspw. Sachsituationen mit passenden Operationen, mathematische Beziehungen mit eigenen Strategien, Runden und Überschlagen mit Stellenwerten oder Schätzen und Messen mit Skalen und Referenzgrössen verglichen werden. Wir können noch allgemeiner festhalten, dass das mathematische Tun und damit verbundenes Wahrnehmen, Erforschen, Darstellen, Beschreiben, Erklären, Argumentieren, Mathematisieren, Anwenden oder Überprüfen vielfältige Vergleiche bedingen.

Gut zu wissen …

Die Handlungsaspekte konkretisieren die schillernden Ausprägungen von Verstehensprozessen, sie regen individuelle Sinnkonstruktionen an und tragen zur inner- und aussermathematischen Anwendung bei.
Wir empfehlen, allen Lernenden genügend Zeit zu geben, um die Schlüsselkompetenzen entlang aller Handlungsaspekte bzw. unter dem Aspekt des Vergleichens zu erweitern, zu vertiefen und sukzessive zu verinnerlichen.

3.3 Welche Bedeutung haben peer-interaktive Lernanlässe?

Handlungsaspekte fordern zum Gespräch über mathematische Beziehungen heraus

Die zweiteiligen Handlungsaspekte «Operieren und Benennen», «Erforschen und Argumentieren» und «Mathematisieren und Darstellen» lassen sich als dialogische oder kooperative Lernanlässe interpretieren, weil jeweils Letztere (auch) sprachliche Aspekte enthalten. Beim Sololernen bzw. beim stillen Abarbeiten von Aufgaben fehlt das Gegenüber, um Argumente oder Darstellungen auszutauschen. Das ist nicht nur schade, sondern auch fatal, denn der peer-interaktive Austausch gehört zu den wichtigen Gelingensbedingungen mathematischen Lernens!

Unterscheidung zwischen permanenten und vorbereiteten Interaktionen
Reichhaltige bzw. natürlich differenzierende Aufgaben eignen sich bestens für den dialogischen Austausch, weil dieser von unterschiedlichen Perspektiven lebt (Hess et al. 2022). Wir empfehlen, zwischen permanenten und vorbereiteten Peer-Interaktionen zu unterscheiden, weil daraus wichtige Konsequenzen für die Differenzierung und den Umgang mit Schwierigkeiten hervorgehen. Bei *permanenten Interaktionen* werden Aufgaben von Anfang an gemeinsam gelöst. Das ist sinnvoll, wenn es um kooperative Aushandlungen, um gemeinsam zu entwickelnde Eigenproduktionen oder um kreative Suchprozesse geht, in welchen ein Beitrag den anderen auslöst, also gewissermassen «Ideen überspringen». Permanenten stehen *vorbereitete Interaktionen* gegenüber, in welchen der Austausch erst stattfindet, nachdem die Kinder eigene Lösungswege versucht und Lösungen gefunden haben. Solche eignen sich bestens zur Differenzierung, weil Lehrpersonen oder SHP die Vorbereitung auf die Interaktionen unterschiedlich begleiten können, in mehr oder weniger langen und intensiven Material gestützten Phasen. Das Kind erfährt den Lohn für solche Vorbereitungen im anschliessenden sozialen Austausch mit Peers.

> Beim Sololernen bzw. beim stillen Abarbeiten von Aufgaben fehlen die Adressaten, um Argumente oder Darstellungen auszutauschen.

3.4 Wie inszeniere und differenziere ich Übungsanlässe?

Nicht jede Aufgabe ist gut gewählt, nur weil sie natürlich differenziert. Es braucht weitere Kriterien, um Lern- bzw. Übungsanlässe spezifisch auszurichten. Denn es besteht ein wesentlicher Unterschied darin, ob Lernende ein operatives Beziehungswissen, Routinen in der Umsetzung, mentale Vorstellungen oder ein spontan abrufbares Faktenwissen erwerben sollen. Derart differenzierte Übungsangebote sind effektiv und effizient, wenn sie spezifische Lernbedürfnisse bedienen. Dies gilt, obschon der Lehrplan 21 nur implizit auf Routinen und Geläufigkeiten verweist, bspw. im Anspruch, Lernende sollen «ohne Zählen bis 100 addieren und subtrahieren» können. Damit sind mentale Vorstellungen, prozedurale Routinen und Automatisierungen verbunden, die zwar nicht genannt, aber mitgemeint sind.

Spezifische mentale Vorstellungen aufbauen
Bereits in Kapitel 3.1 verweisen wir auf die Bedeutung von Verinnerlichungsprozessen bzw. auf die Ablösung konkreter Handlungsvollzüge durch mentales Operieren (vgl. Abb. 10). Die Vorstellungsbildung kann sich auch auf spezifische Anordnungen oder

Darstellungen von bspw. Verdoppelungen, Gliederungen mit dem 5er oder Strukturen im 100er-Punktefeld beziehen. Solche Übungsabsichten lassen sich mit Darstellungen umsetzen, die vorerst sichtbar sind, dann abgedeckt und aus der Erinnerung weiterverarbeitet werden. In einem anderen Beispiel werden zwei Anordnungen verglichen, wobei aber nur eine sichtbar ist und die andere verdeckt bleibt. Dies kann bspw. mit einem 50er-Punktefeld auf einer Spielkarte und einem 75-Feld auf einer anderen erfolgen. Die eine wird aufgedeckt und muss wieder gedreht werden, bevor die zweite Darstellung sichtbar wird.

Routinen in der Umsetzung eigener Strategien erwerben
Die Annäherung an und das Kennenlernen von mathematischen Beziehungen sollen der Anwendung in eigenen Strategien dienen. Insofern sind erstere in der «mathematischen Theorie» und letztere in der «subjektseitigen Anwendung» anzusiedeln. Nach der beschriebenen Verinnerlichung von Strategien (vgl. Abb. 10) sind manche Kinder darauf angewiesen, die mentale Anwendung bis hin zu einer gewissen Geläufigkeit zusätzlich zu üben. Dies soll jeweils kurz, intensiv und verteilt über längere Zeiträume erfolgen. Ein flexibler Strategiegebrauch bildet letztlich die Grundlage für komplexe Auseinandersetzungen.

Ein zu automatisierendes Abrufwissen erwerben
Ein wesentlicher Bestandteil des Mathematiklernens besteht aus Üben. Dabei geht es wie genannt um den Aufbau mentaler Vorstellungen, die Geläufigkeit von Strategien und ebenso um gewisse spontan abrufbare Fakten. Zu letzteren gehören Kernaufgaben des Einspluseins bis 20 wie Verdoppelungen, die Kraft der 5 und Ergänzungen bis 10 sowie Kernaufgaben des kleinen Einmaleins, 2 ×, 5 × und 10 × jeder Reihe. Kernaufgaben sollten auswendig abrufbar sein, damit andere Aufgaben wie $6 + 7$ über den Vergleich mit $6 + 6$ oder 6×7 über den Vergleich mit 5×7 gelöst werden können. In weiteren Lernprozessen gilt es, die Vergleiche auf grössere Zahlenräume zu übertragen, bspw. $6 + 7 = 6 + 6 + 1$, $56 + 7 = 50 + 6 + 6 + 1$ oder $6 \times 70 = 5 \times 70 + 70$. Das Automatisieren erfolgt gerne über Trainingsspiele, weil die Spielregeln und der soziale Kontext die Richtung und die sekundäre Bedeutung der Anstrengungen vorgeben. Die genannten drei Übungsabsichten sind als ein Zusammenspiel zu sehen: Die eine spielt in die andere hinein, trägt zur anderen bei und setzt die andere voraus.

Gut zu wissen …

Ein effektives mathematisches Lernen setzt Aufgaben voraus, die allen Kindern einen Einstieg ermöglichen und individuell herausfordern. Dafür eignen sich reichhaltige Lernanlässe, die natürlich differenzieren und den Austausch spannend machen. Übungsanlässe sind spezifisch auf mathematische Beziehungen, Strategien, mentale Vorstellungen und ein spontanes Abrufwissen auszurichten.

4. Wenn Schlüsselkompetenzen ausbleiben

4.1 Welche Konsequenzen sind im gemeinsamen Unterricht zu ziehen?

Unsere bisherigen Botschaften lauten: Kinder mit besonderen Schwierigkeiten sollten sich vorrangig *zentralen* Konzepten annähern und das erworbene Wissen anwenden. Dies führt zu einer zeitlichen Entlastung, weil gewisse Grundansprüche und Orientierungspunkte vorerst ausgespart bleiben. Die freiwerdenden Lernzeiten können und sollen für die Verinnerlichung, Automatisierung und Flexibilisierung der Schlüsselkompetenzen genutzt werden. Dies lässt sich entlang von Aufgaben zu Grundoperationen, Stellenwerten, funktionalen Zusammenhängen, Anteilen und Sachrechnen umsetzen, allenfalls mit unterschiedlichen Lösungserwartungen, Abstraktionsgraden und Komplexitäten.
Entsprechend muss ein Mathematikunterricht einige Ansprüche erfüllen, bis er nachhaltig Lernschwierigkeiten vorbeugen und Schlüsselkompetenzen sichern kann (Gaidoschik et al. 2021):

- Im Fokus stehen reichhaltige Aufgaben, die natürlich differenzieren, alle Handlungsaspekte einfordern und sukzessive Annäherungen an relevante Konzepte ermöglichen (vgl. Kap. 3.1 und 3.2).
- Das aktive, forschende, vergleichende und entdeckende Lernen überwiegt gegenüber lehrseitigem Beibringen, Regeln vorgeben und Instruieren (vgl. ebd.).
- Lernende nutzen Handlungsmaterialien als Anschauungs-, Kommunikations- und Forschungsmittel und verinnerlichen zentrale Konzepte (vgl. Kap. 3.1; 4-Phasenmodell).
- Sie setzen sich dialogisch und kooperativ mit anderen Perspektiven, Darstellungen und Argumenten auseinander (vgl. Kap. 3.3).
- Übungsabsichten unterscheiden zwischen produktivem Üben (erforschen, darstellen, anwenden und begründen), mentale Vorstellungen aufbauen, Strategien sichern und Fakten automatisieren (vgl. Kap. 3.1 und 3.4).

4.2 Welche Bedeutung haben pädagogisch-therapeutische Angebote?

Mit «geschützten» Lernzeiten meinen wir, dass jedes Kind ein Anrecht auf den Erwerb von Schlüsselkompetenzen hat (vgl. Kap. 3.1). Deren Sicherung erfordert je nach Lernstand zusätzlicher pädagogisch-therapeutischer Angebote, parallel zum gemeinsamen Unterricht und vorzugsweise in Kleingruppen. Auch wenn wir zur natürlichen Differenzierung und spezifischen Anpassungen entlang der Dimensionen Abstraktion und Komplexität anregen, gestehen wir ein, dass nicht alle Differenzierungen und Anpassungen im gemeinsamen Unterricht möglich und sinnvoll sind.

Wenn Kinder stagnieren, nicht mehr motiviert sind und kaum mehr vom regulären Unterricht profitieren, sollten Matheclubs ausserhalb des gemeinsamen Unterrichts ins Auge gefasst werden.

Mut zu Matheclubs, parallel zum Unterricht

Deshalb schlagen wir pädagogisch-therapeutische Matheclubs vor. Dies in der Absicht, den Aufbau von Schlüsselkompetenzen zusätzlich zu sichern. Darüber berichtete Erfahrungen von Absolventinnen des *CAS Mathematisches Lernen in der Sackgasse?* bestätigen die Bedeutung und die Effektivität solcher – auch klassenübergreifender – Angebote. Je grösser der Abstand zwischen individuellen Lernständen und den regulären Anforderungen an die Klasse, desto eher sind solche Massnahmen angezeigt. Wenn Kinder stagnieren, nicht mehr motiviert sind und kaum mehr vom regulären Unterricht profitieren, sollten sie ins Auge gefasst werden (vgl. Abb. 12). Die exklusiven Angebote können Lernprozesse und damit Lernende und Lehrende wesentlich entlasten. Sie rütteln nicht am integrativen Gedanken, weil sie dadurch definiert werden, dass die Lernenden so lange daran teilnehmen, bis sie wieder mehr oder adäquater von regulären Angeboten des gemeinsamen Unterrichts profitieren können.

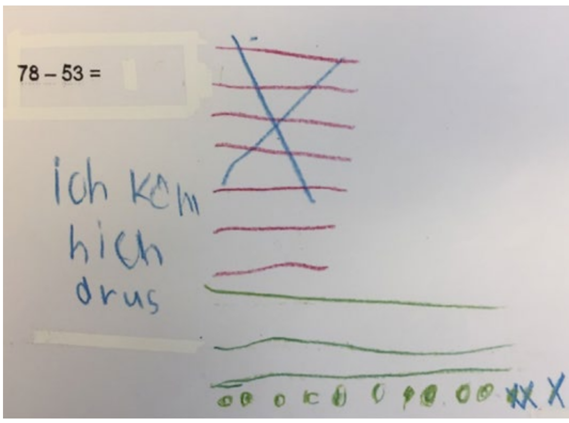


Abbildung 12 Hilf- und Ratlosigkeit beim Mathelernen

Passung pädagogisch-therapeutischer Massnahmen zum gemeinsamen Unterricht

Matheclubs verfolgen eigene Zielsetzungen hinsichtlich Schlüsselkompetenzen und finden parallel zum gemeinsamen Unterricht statt. Dennoch wäre eine inhaltliche

Passung sinnvoll, bspw. indem Club-Teilnehmende zum gemeinsamen Lernen beitragen, vielleicht ein extern eingesetztes Spiel im gemeinsamen Unterricht vorstellen bzw. leiten oder sich im Club auf Interaktionen vorbereiten, die im gemeinsamen Unterricht stattfinden (vgl. Kap. 3.3). Die Bedeutung solcher Beiträge liegt auf der sozioemotionalen bzw. motivationalen Ebene. Die Kinder erfahren, dass ihnen das externe Lernen etwas bringt und dass andere Kinder ihre Fortschritte anerkennen. Während den Lektionen des Matheclubs thematisiert der reguläre Unterricht vorzugsweise Lerninhalte ausserhalb der Schlüsselkompetenzen.

Gut zu wissen …

Bei erheblichen Lernschwierigkeiten können separate Kleingruppen angezeigt sein. Darin werden Schlüsselkompetenzen gesichert, bis die Betroffenen (wieder) vom gemeinsamen Unterricht profitieren können. Im integrativen Unterricht überwiegen natürliche Differenzierungen, Herausforderungen zum aktiv-entdeckenden Lernen, vorbereitete Peer-Interaktionen und spezifisch ausgerichtete Übungsanlässe (vgl. Kap. 3.1 bis 3.4).

4.3 Worin bestehen Nachteilsausgleichsmassnahmen zum mathematischen Lernen?

Formale Ausrichtung von Nachteilsausgleichsmassnahmen (NAM)
Mit NAM sind Anpassungen von Aufgabenstellungen in Prüfungen gemeint, um Nachteile von Lernenden mit einer Behinderung[2] auszugleichen bzw. zu verringern und damit die Bildungschancen zu wahren (vgl. Verband Dyslexie o.J.; DBK & AgS 2022). Die schweizweit unterschiedlichen kantonalen Regelungen sind durchgehend formal ausgerichtet und bezüglich Schwierigkeiten beim Mathematiklernen unverbindlich formuliert. Die formale Ausrichtung der NAM bezieht sich auf eine diagnostizierte Dyskalkulie, welche als *negativ abweichende mathematische Leistungen bei mindestens durchschnittlicher Intelligenz und unauffälligen anderen Schulleistungen* definiert wird (Diskrepanzdefinition). NAM werden in den meisten Kantonen gewährt, wenn unterrichtliche und pädagogisch-therapeutische Massnahmen nicht oder kaum erfolgreich waren. Es ist nicht vorgesehen, NAM an individuelle Förderabsichten oder angepasste Lernziele (im Sinne einer qualitativen oder quantitativen Reduktion) zu koppeln. Im Zeugnis signalisiert eine genügende Note, dass die NAM passen bzw. greifen. Die Beispiele in kantonalen Regelungen beziehen sich durchgehend auf die Lese-Rechtschreibschwäche, wie etwa «mehr Zeit und Pausen gewähren». Sinnvolle Beispiele für NAM bei Dyskalkulie sind kaum zu finden, vielleicht weil «mehr Zeit geben» oder «einen Rechner nutzen» keine adäquaten Massnahmen wären.

Forderung: NAM auf Schlüsselkompetenzen beziehen und diese variieren
Die fachdidaktische Orientierung dieser Broschüre legt nahe, NAM kompetenzorientiert auszuweisen und zu deklarieren, dass sich Anpassungen auf spezifische Schlüsselkompetenzen beziehen und über die Dimensionen Abstraktion und Komplexität variiert werden (vgl. Kap. 3.1). Eine Differenzierung über die Abstraktion erfolgt, wenn die Aufgabendarbietung und/oder der Lösungsweg unterschiedliche Handlungs- und

2 Das Behindertengleichstellungsgesetz (BehiG) bezeichnet auch partielle Lernstörungen wie Dyskalkulie oder Lese-Rechtschreibschwierigkeiten (LRS) als Behinderung (vgl. BehiG Art. 2, Abs. 1).

Anschauungsbezüge zulassen (entlang des 4-Phasenmodells; vgl. Kap. 3.1). Diejenige über die *Komplexität* meint bspw. etappierte Zielsetzungen zu reichhaltigen Aufgaben, eingeschränkte Zahlenräume oder Sachaufgaben, die mit Skizzen und Tabellen gestützt werden. Am Beispiel Zahlenräume zeigt sich das Wesentliche: Schlüsselkompetenzen zur operativen Anwendung des Stellenwertprinzips lassen sich auch in eingeschränkten Zahlenräumen (Reduktion der Komplexität) und mit unterschiedlichen Handlungs- und Anschauungsbezügen (variable Abstraktion) prüfen. Solche Differenzierungen korrespondieren mit curricular vorgegebenen Zielen bzw. im Sinne dieser Broschüre. Die spezifischen Schlüsselkompetenzen werden von allen eingefordert, die Aufgabendarbietungen und Lösungserwartungen aber im Sinne einer NAM variiert und in die Bewertung einbezogen.

5. Literatur

D-EDK; *Deutschschweizer Erziehungsdirektoren-Konferenz (2015). Fachbereichslehrplan Mathematik.* Direktlink: www.v-fe.lehrplan.ch

Direktion für Bildung und Kultur (DBK) & Amt für gemeindliche Schulen (AgS) (2022). *Richtlinien Nachteilsausgleich für die Primarstufe und Sekundarstufe I der gemeindlichen Schulen* (2. Aufl). Kanton Zug: DBK, AgS.
Zum Download: www.zg.ch/de/bildung/bildungssystem/chancen/chancen-gemeindliche-schulen

Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M. & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. *Special Issue der Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* 47 (111 S).
Zum Download: ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/issue/view/46/35

Gaidoschik, M. (2014). *Einmaleins verstehen, vernetzen, merken. Strategien gegen Lernschwierigkeiten.* Seelze: Klett & Kallmeyer.

Hess, K. (2022). *Kinder brauchen Strategien. Eine frühe Sicht auf mathematisches Verstehen* (3. Auflage). Seelze: Klett & Kallmeyer.

Hess, K., Geissbühler, S. & Hähn, K. (2022). Wie lernen Kinder (erfolgreich) rechnen? *Schulinfo Zug.* Direktlink: www.zg.ch/behoerden/direktion-fur-bildung-und-kultur/schulinfo/schule

Hess, K., Hauser, S., Buchmann, S., Giroud, C. & Geissbühler, S. (2022). Lernen im Gespräch – kooperative Lernsettings unter der Lupe. *journal für schulentwicklung,* 26 (3), 29–38.

Hess, K. (2020). Mathematische Rahmen: Lerngelegenheiten zur Annäherung an mathematische Konzepte. *4bis8.* H.7, 18–19.
Download: www.zg.ch/behoerden/direktion-fur-bildung-und-kultur/phzg/weiterbildung/fokus-mathematik

Hess, K. (2019). Mathe treiben im Kindergarten. Orientierungspunkte und entwicklungsorientierte Zugänge zum Lehrplan 21. *Broschürenreihe Unterrichts- und Schulentwicklung konkret.* Zug: PH Zug.
Download: www.zg.ch/behoerden/direktion-fur-bildung-und-kultur/phzg/ph-zug/medien-publikationen/mitarbeitenden-broschuerenreihe/mathe-treiben-im-unterricht

Hess, K. (2018). *Mathwelt 1. Rätselheft Kindergarten bis 2. Schuljahr.* Bern: Schulverlag plus AG.

Selter, Ch. & Zannetin, E. (2018). *Mathematik unterrichten in der Grundschule. Inhalte – Leitideen – Beispiele.* Seelze: Klett & Kallmeyer.

Verband Dyslexie (o.J.). *Nachteilsausgleich bei Legasthenie und Dyskalkulie.* Direktlink: www.verband-dyslexie.ch

Wartha, S. & Schulz, A. (2011). *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen.* Kiel: IPN.

Anhang

A1 Checkliste zu Schlüsselkompetenzen bis Ende der 2. Klasse

Schlüsselkompetenz: Stellenwerte vergleichen Die Lernenden …	✓/×	**Bemerkungen**
vergleichen abstrakte Ziffern mit dargestellten Ziffernwerten in gesprochenen und geschriebenen 2-stelligen Zahlen.		
lesen und schreiben, hören und schreiben 2-stellige Zahlen.		
unterscheiden zwischen Stellenwerten beim Addieren und Subtrahieren bis 100.		
Schlüsselkompetenz: Grundoperationen vergleichen Die Lernenden …		
vergleichen Additionen mit Kernaufgaben bis 20 (Verdoppeln, Kraft der 5 und Ergänzungen bis 10).		
vergleichen Additionen bis 20 mit solchen bis 100 (bspw. Analogien zu Kernaufgaben bis 20; bspw. 5 + 3 = 8 → 50 +30 = 80, 35 + 3 = 38).		
vergleichen Additionen und Subtraktionen bis 100 (Umkehroperationen nutzen bzw. Ergänzen; bspw. 75 – 25 = 50, weil 50 + 25 = 75).		
vergleichen Additionen und Multiplikationen bis 100, finden eigene Strategien und überprüfen Ergebnisse (bspw. 5 × 7 = 35 → 6 × 7 = 35 + 7).		
Schlüsselkompetenz: Sachsituationen mit mathematischen Modellen vergleichen Die Lernenden …		
modellieren Sachaufgaben (Sachstruktur erfassen, mathematisieren und Ergebnis interpretieren).		
veranschaulichen Grundoperationen mit Sachaufgaben (Bildern, Rechengeschichten).		
Schlüsselkompetenz: Mit fachsprachlichen Begriffen und Symbolen vergleichen Die Lernenden …		
vergleichen mit den Begriffen plus, minus, gleich, mal, grösser als, kleiner als, ergänzen, halbieren, verdoppeln, 10er, 1er.		
vergleichen mit den Symbolen +, –, =, ×, <, >.		

A2 Checkliste zu Schlüsselkompetenzen bis Ende der 4. Klasse

Schlüsselkompetenz: Stellenwerte vergleichen Die Lernenden …	✓/×	**Bemerkungen**
vergleichen abstrakte Ziffern mit dargestellten Ziffernwerten.		
nutzen die Stellenwerttafel beim Erforschen arithmetischer Strukturen.		
lesen und schreiben natürliche Zahlen bis 1 Million oder bis _______.		
runden natürliche Zahlen auf 10er, 100er und 1'000er.		

Schlüsselkompetenz: Grundoperationen vergleichen Die Lernenden …		
verdoppeln, halbieren, addieren und subtrahieren bis 100 ohne Zählen (mit 10er-Überträgen).		
vergleichen Grundoperationen, sie zeigen und beschreiben operative Beziehungen, stellen Rechenwege dar, tauschen diese aus und vollziehen sie nach.		
lassen sich auf reichhaltige Aufgaben ein, erforschen Beziehungen, formulieren Vermutungen, suchen Lösungswege und tauschen diese aus.		
vergleichen multiplikative Strukturen in grafischen Modellen, insbesondere Verdoppelungen, 1× mehr und 1× weniger und nutzen die operativen Beziehungen in eigenen Strategien.		
rufen die Produkte des kleinen Einmaleins geläufig ab und vergleichen diese mit dem 10er-Einmaleins.		
vergleichen Divisionen mit Umkehroperationen (auch solche mit Rest) und der Addition.		

Schlüsselkompetenz: Sachsituationen mit mathematischen Modellen vergleichen Die Lernenden …		
vergleichen Grundoperationen und Terme, die Umkehroperationen bedürfen (bspw. 32 + _ = 58 → 58 – 32 = 26) mit Handlungen, Sachbildern, Rechengeschichten und grafischen Strukturen.		
modellieren Rechengeschichten und Darstellungen mit Grundoperationen und Termen, die einer Umkehroperation bedürfen.		
vergleichen Masszahlen zu Längen, Inhalten (Volumen in Litern), Gewichten, Zeitdauern, Anzahlen und Preisen, stellen diese in Tabellen und Diagrammen dar und interpretieren sie.		
beschreiben Wertetabellen mit proportionalen Zusammenhängen.		

Schlüsselkompetenz: Mit fachsprachlichen Begriffen und Symbolen vergleichen Die Lernenden …		
vergleichen mit den Begriffen Addition, Subtraktion, Unterschied (Differenz), Multiplikation, Division, Rest, 1000er, 100er, 10er, 1er, Stellenwerte.		
vergleichen mit den Grundoperationszeichen.		

A3 Checkliste zu Schlüsselkompetenzen bis Ende der 6. Klasse

Schlüsselkompetenz: Stellenwerte und Brüche vergleichen Die Lernenden …	✓/×	**Bemerkungen**
runden natürliche Zahlen auf 10er, 100er und 1’000er.		
überschlagen Grundoperationen mit natürlichen Zahlen zur Überprüfung von Ergebnissen.		
vergleichen und ordnen Dezimalzahlen und Brüche.		
stellen Brüche mit den Nennern 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 dar, vergleichen diese und interpretieren sie im Kreis- oder Rechteckmodell.		
lesen und schreiben Dezimalzahlen und Brüche.		

Schlüsselkompetenz: Grundoperationen vergleichen Die Lernenden …		
vergleichen Grundoperationen und überprüfen Ergebnisse durch Vereinfachen (Verdoppeln und Halbieren), Zerlegen und Umkehroperationen.		
vergleichen Grundoperationen, während sie systematische Aufgabenfolgen bilden, weiterführen, verändern und beschreiben.		

Schlüsselkompetenz: Sachsituationen mit mathematischen Modellen vergleichen Die Lernenden …		
vergleichen Informationen aus Sachtexten, Tabellen, Diagrammen und Bildern aus den Medien mit proportionalen Zusammenhängen.		
erfassen proportionale Zusammenhänge in Wertetabellen, beschreiben und modellieren solche.		

Schlüsselkompetenz: Mit fachsprachlichen Begriffen und Symbolen vergleichen Die Lernenden …		
vergleichen mit den Begriffen Bruch, Teiler, Vielfache, Zähler, Nenner, überschlagen, runden.		
vergleichen mit dem Symbol ≈.		

Auch wenn das mathematische Lernen noch so harzt und stockt, sollten Betroffene wiederkehrend «geschützte» Lernzeiten erhalten, um in aller Ruhe und Gelassenheit ausstehende Schlüsselkompetenzen zu erwerben.

Kanton Zug

Pädagogische Hochschule Zug