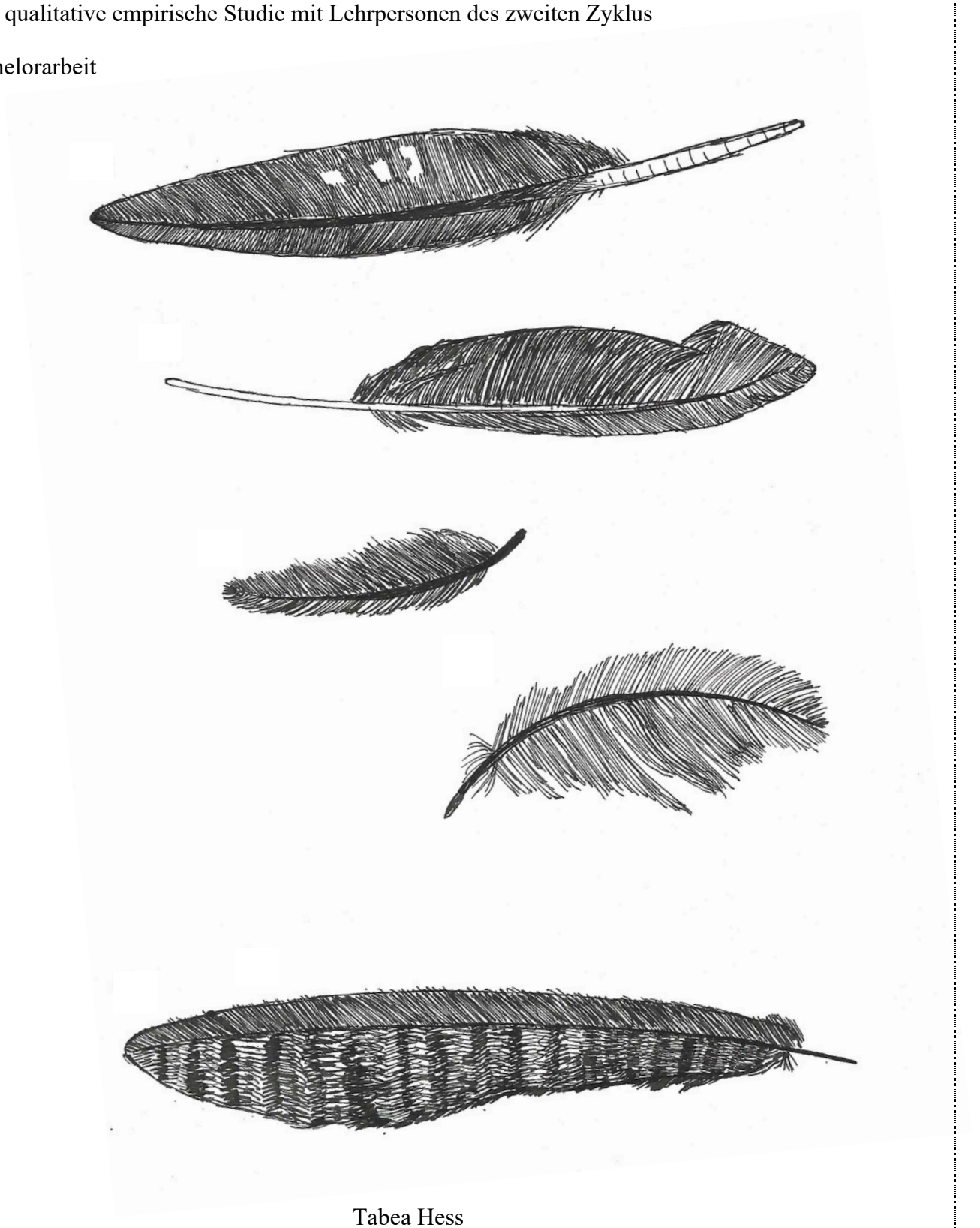
Pädagogische Hochschule Zug

Mathematisches Argumentieren

Eine qualitative empirische Studie mit Lehrpersonen des zweiten Zyklus

Bachelorarbeit



Tabea Hess

Eingereicht bei Anne Tester, MA

Zug, 5. Februar 2021

Abstract

Die vorliegende Studie geht den Fragen nach, was sich praktizierende Lehrpersonen unter dem mathematischen Argumentieren vorstellen – bzw. was sie darüber wissen und welchen Stellenwert sie diesem beimessen – und welche Konsequenzen sich daraus ziehen lassen. Dazu werden folgende empirisch verantwortbaren Fragen gestellt: (1) Was wissen praktizierende Lehrpersonen über das mathematische Argumentieren? (2) Wie unterscheiden sich diese subjektiven Theorien von der fachdidaktisch belegten Theoriebildung? Die Ergebnisse führen zu unterrichtspraktischen Hinweisen und zu Konsequenzen für die Aus- und Weiterbildung.

Um die genannten Fragen zu beantworten, wurde eine qualitative Inhaltsanalyse von teilstrukturierten Interviews durchgeführt. Die Ergebnisse werden mit fachdidaktischen Theorien referenziert und abgeglichen. Schliesslich werden Folgerungen für die Schulpraxis, die Aus- und Weiterbildung diskutiert und begründet gezogen.

Vorwort

> Noemi hat in der Schule behauptet, dass in ihrem Kissen 1 Million Gänsefedern drin sind. Mona möchte das überprüfen und wiegt dazu ihr eigenes Federkissen. Es ist 1100g schwer. Im Internet hat Mona herausgefunden, dass eine Feder im Schnitt ca. 0.25 Gramm wiegt. Kann es sein, dass in Noemis Kissen 1 Million Federn drin sind? Begründe.

–

Oft machen meine Gesprächspartnerinnen und -partner grosse Augen, wenn ich ihnen das Thema meiner Bachelorarbeit nenne. Mathematisches Argumentieren klingt ja auch weniger aufregend als viele Themen meiner Mitstudierenden. Noch grösser werden die Augen, wenn ich erwähne, dass ich die Bachelorarbeit nicht regulär nach dem 5. Semester abgebe, sondern ein Jahr früher. Wenn ich dann erzähle, dass ich bei einem Nationalfondsprojekt (FEMAR) mitarbeiten durfte und so auf einfachem Weg zu Daten kam, werden die Augen auch gleich wieder etwas kleiner.

Zu Beginn meines Studiums an der PH Zug konnte ich einiges nicht vorwegnehmen, weil es schliesslich ganz anders kam als ich dachte. Beispielsweise, dass ich ab dem zweiten Semester von zu Hause aus studieren oder dass ich meine Bachelorarbeit bereits nach dem ersten Semester beginnen und nach dem Dritten abgeben würde. Das vergangene Jahr war nicht einfach – ja manchmal fast schon ein Kampf. Doch ich war auch nie ganz allein.

Eine wohlwollende Unterstützung erfuhr ich während meines Arbeitsprozesses von Frau Heidi Dober. In der Schlussphase stand mir Frau Anne Tester beratend zur Seite und gab mir wertvolle Hinweise. Zwischenzeitliche Durststrecken konnte ich dank des bereichernden Austausches mit meinem Vater, Herrn Prof. Dr. Kurt Hess, überwinden, der während des Schreibprozesses viele fruchtbare Gedanken in mir weckte. Für all dies möchte ich mich herzlich bedanken.

Ein weiterer Dank gilt den Initiierenden und allen Mitwirkenden des FEMAR-Projektes. Die Interviewdaten gewährten mir einen interessanten Einblick in die Gedankenwelt von Lehrpersonen. Die fertig aufbereiteten Daten waren ein grosses Geschenk – mitunter auch an meinen Schlaf – da ich dafür keine zusätzliche Zeit aufwenden musste.

Zuletzt möchte ich mich bei meinen Eltern Susanne und Kurt Hess dafür bedanken, dass sie mir während dieses nervenaufreibenden Jahres stets so viel Verständnis entgegenbrachten. Sie und ein guter Freund nahmen sich zudem die Zeit, meine Bachelorarbeit gegenzulesen.

Unterägeri, im Januar 2021

Tabea Hess

Inhalt

1 Einleitung ... 1

1.1 Begründung der Themenwahl ... 1

1.2 Fragestellungen ... 1

1.3 Aufbau der Bachelorarbeit ... 2

2 Subjektive Theorien ... 3

3 Mathematisches Argumentieren ... 4

3.1 Der Argumentationsbegriff ... 4

3.2 Theorien zum mathematischen Argumentieren ... 4

3.2.1 Argumentieren als Prozess ... 6

3.2.2 Eigenheiten des mathematischen Argumentierens ... 9

3.3 Mathematisches Argumentieren in der Primarschule ... 12

3.3.1 Darstellungswechsel ... 17

3.3.2 Den Argumentationsprozess anregen ... 22

4 Methoden ... 24

4.1 Fragestellung ... 24

4.2 Forschungsdesign: Rahmenbedingungen der Erhebung ... 24

4.3 Erhebungsinstrumente ... 25

4.4 Datenauswertungsverfahren ... 25

4.5 Stichprobe ... 26

5 Ergebnisse aus den Interviews (subjektive Theorien) ... 27

5.1 Bandbreite der Ergebnisse ... 27

5.2 Widersprüche ... 30

6 Diskussion ... 32

6.1 Quantität versus Qualität ... 35

6.2 Schlussfolgerungen und didaktische Konsequenzen ... 36

6.3 Kritik ... 37

6.4 Fazit ... 38

Literatur ... 39

Anhang ... 43

Abbildungen

Abbildung 1: Vier Bausteine des Argumentierens (Bezold, 2010, S. 3) 7
Abbildung 2: Teilkompetenzen des Argumentationsprozesses (vgl. Brunner, 2016, S. 37 f.) 8
Abbildung 3: Argumentationsprozess in fünf Schritten (vgl. Bezold, 2010, S. 3; Brunner, 2016, S. 37 f.) 8
Abbildung 4: Modellierungen (vgl. Müller & Wittmann, 1984, S. 253; Hess, 2012, S. 203) 11
Abbildung 5: Legofigur "Frau Meier" 21
Abbildung 6: Legostühle "Kinosessel" 21
Abbildung 7: Wendeplättchen "Kinosaal" 21
Abbildung 8: Hunderterpunktefeld "Kinosaal" 21

Tabellen

Tabelle 1: Sprachliche Grundfertigkeiten (vgl. Huneke & Steinig, 1997, S. 91) 10
Tabelle 2: Die Kompetenzbereiche und Handlungsaspekte im Überblick (LP21, 2020) 14
Tabelle 3: Abgleich verschiedener Modelle mit dem Lehrplan 21 15
Tabelle 4: Darstellungsformen und –mittel im EISS-Prinzip 19
Tabelle 5: Darstellungswechsel 22

1 Einleitung

Die folgenden Abschnitte thematisieren die Entstehungszusammenhänge und den Aufbau dieser Arbeit.

1.1 Begründung der Themenwahl

Zu Beginn meines Studiums an der Pädagogischen Hochschule Zug (PHZG) meldete ich mich für die studentische Mitarbeit bei einer Interventionsstudie des Schweizerischen Nationalfonds (SNF). Das Projekt mit dem Titel *Formatives Feedback zum mathematischen Argumentieren (FEMAR)* unter der Leitung von Dr. Robbert Smit und Prof. Dr. Kurt Hess ist das Nachfolge-Projekt von *Lernen mit Rubrics (LERU)*. Durch die Mitarbeit im FEMAR-Projekt erhielt ich die Gelegenheit, einen Teil der erhobenen Daten für meine Bachelorarbeit zu verwenden. Mit dieser Arbeit bereite ich mich auf meinen künftigen Mathematikunterricht vor, weil ich darin verbindliche Lernanlässe zum mathematischen Argumentieren anzubieten habe.

Die Interventionsstudie prüfte in erster Linie die Wirkung von formativen Feedbacks, welche Lehrpersonen entlang eines Beurteilungsrasters (Rubric) erteilen. Im Handlungsaspekt «Erforschen und Argumentieren» des Lehrplans 21 lässt sich die Untersuchung fachdidaktisch einordnen (vgl. PHZG, 2020).

1.2 Fragestellungen

Lehrpersonen sollten einerseits wissen, was mathematisches Argumentieren voraussetzt, beabsichtigt und den Kindern bringt und andererseits wie es in Lernanlässen inszeniert und herausgefordert wird. Nur so können sie ihre Schülerinnen und Schüler optimal in ihrem Lernen unterstützen.

Im Projekt FEMAR wurden Interviews zum mathematischen Argumentieren und entsprechenden Feedbacks geführt. Die Analyse eines Teils dieser Interviewdaten soll die subjektiven Theorien der Lehrpersonen erhellen. Es ist ein bedeutsames Ziel dieser Arbeit, allfällige Unschärfen und blinde Flecken zu eruieren. Die Aussagen der Lehrpersonen werden mit Kernaussagen aus der Fachliteratur verglichen.

Der Forschungsprozess wird von folgenden Fragestellungen geleitet:

1. Was wissen praktizierende Lehrpersonen über das mathematische Argumentieren?
2. Wie unterscheiden sich die subjektiven Theorien der Lehrpersonen von fachdidaktischen Kernaussagen?
3. Was bedeuten die Erkenntnisse zu den ersten beiden Fragen für die Unterrichtspraxis und darüber hinaus für die Aus- und Weiterbildung?

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind von fachdidaktischer Relevanz, weil Lehrpersonen aller Zyklen spätestens seit der Einführung des Lehrplan 21 mit dem mathematischen Argumentieren konfrontiert sind.

1.3 Aufbau der Bachelorarbeit

Das 3. Kapitel entfaltet den Argumentationsbegriff mit Bedeutungen, fachdidaktischen Zusammenhängen und der Verortung im Lehrplan 21 (Fachbereich Mathematik). Kapitel 4 beschreibt die qualitative Inhaltsanalyse als Methode zur Auswertung der Interviews. Im Kapitel 5 erfolgt die Deskription der Interviewdaten. Daraus gewonnene Erkenntnisse werden im Kapitel 6 mit der Theorie (vgl. Kap. 3) abgeglichen und diskutiert. Schliesslich führen sie zu unterrichtspraktischen Hinweisen und zu Konsequenzen für die Aus- und Weiterbildung.

2 Subjektive Theorien

Das begriffliche Konstrukt «subjektive Theorien» stammt aus der Psychologie. Groeben (1988) versteht darunter

- «Kognitionen der Selbst- und Weltsicht,
- die im Dialog-Konsens aktualisier- und rekonstruierbar sind
- als komplexes Aggregat mit (zumindest impliziter) Argumentationsstruktur,
- das auch die zu objektiven (wissenschaftlichen) Theorien parallelen Funktionen
- der Erklärung, Prognose, Technologie erfüllt,
- deren Akzeptierbarkeit als 'objektive' Erkenntnis zu prüfen ist» (S. 22).

Privates Wissen, subjektives Verstehen, persönliche Meinungen und Haltungen als auch Gedanken und Äusserungen zu einem Thema erfüllen den Anspruch an subjektive Theorien, wenn diese der Erklärung oder Prognose (und damit der Begründung) dienen. Subjektive Theorien werden stets von persönlichen Präferenzen und Orientierungen beeinflusst, wodurch sich die «subjektiven Theorien» von blossen Theorien unterscheiden.

Wissenschaftliche[1] Theoriebildungen werden hingegen durch Intersubjektivität angestrebt. Sie unterschieden sich insbesondere durch einen «erheblich höher [en …; Anmerkung T.H.] Kohärenz- bzw. Systematisierungsgrad» von den subjektiven Theorien, da sie unter weniger «starkem Zeit-, Handlungs- und Orientierungsdruck etc. stehen» (Groeben, 1988, S. 23). Subjektive Theorien stellen also meist blosse Fragmente dar, selten zeigen sie einen Sachverhalt abschliessend auf.

Die Erschliessung des begrifflichen Konstrukts «subjektive Theorien» ist für diese Arbeit deshalb von Bedeutung, weil die Lehrpersonen in den Interviews ebensolche veräussern. Dasselbe gilt wohl auch für die Argumentationen der Schülerinnen und Schüler, wenn sie sich mit ihrem singulären Wissen und Verstehen an reguläre Theorien herantasten.

[1] Bei Groeben (1988, S. 23) auch «objektive Theorien».

3 Mathematisches Argumentieren

Folgend wird der Argumentationsbegriff entfaltet und in der Systematik des Lehrplans 21 verortet. Die nächsten Abschnitte orientieren sich an den Fragen, wie und weshalb mathematisches Argumentieren in der Primarschule thematisiert wird und was die Kinder dabei lernen bzw. lernen sollen.

3.1 Der Argumentationsbegriff

Der Begriff Argument stammt aus dem Lateinischen («argumentum»). Er bedeutet «Rechtfertigungsgrund, (stichhaltiger, plausibler) Beweisgrund, Punkt einer Beweisführung» (Brockhaus, 2020; Argument). Das Verb argumentieren meint folglich: «Argumente vorbringen» (Brockhaus, 2020; argumentieren) im Sinne des Aufzeigens von Rechtfertigungs- oder Beweisgründen für oder gegen eine Hypothese – durch Abwägen zwischen Pros und Contras bzw. Vor- und Nachteilen (vgl. Büchter & Leuders, 2005, S. 44) –, mit dem Ziel, einen Konsens zu finden. Dies kann auch ohne reales Gegenüber erfolgen, zum Beispiel bei einer persönlichen Entscheidung oder bei schriftsprachlich formulierten Argumenten. Auch Hefendehl-Hebeker & Hussmann (2003, S. 94-95) verstehen unter Argumentieren «eine Rede für oder gegen die Wahrheit einer Aussage bzw. für oder gegen die Gültigkeit einer Norm mit dem Ziel, die Zustimmung oder den Widerspruch wirklicher oder fiktiver Gesprächspartner zu dieser Aussage oder Norm zu erlangen».

Es stellt sich die Frage, was eine Aussage überhaupt zu einem Argument macht. Während Büchter & Leuders (2005, S. 44) die Rationalität betonen, setzen Hefendehl-Hebeker & Hussmann (2003, S. 95) darauf, dass beim Argumentieren «schrittweise und möglichst lückenlos auf bereits gemeinsam anerkannte Aussagen bzw. Normen zurückgegangen» werde. Erst durch diesen Konsens erreicht eine Aussage die Schlüssigkeit, die sie zum Argument macht. Da sich die Normen in verschiedenen Fachbereichen unterscheiden, kann eine Aussage in einem Zusammenhang A ein Argument darstellen, während sie in einem anderen Zusammenhang B lediglich als Äusserung erscheint.

Hierzu ein Beispiel: «Ein Blauwal ist kein Fisch, weil er Lungen hat und keine Eier legt. Der Blauwal ist also ein Säugetier.». Solche Aussagen bzw. Schlüsse gelten in der Biologie als Argumente. Sie beziehen sich auf Empirie. Mathematische Argumente hingegen beziehen sich zumeist auf mathematische Konventionen. Aus diesem Grund erscheinen die genannten Aussagen bzw. Schlüsse in einem mathematischen Kontext nur als Äusserung, nicht aber als Argument (solange sie nicht zusätzlich durch mathematische Modellbezüge gestützt werden; vgl. Kap. 3.2, Beispiel für mathematische Modellierung zur Lösung von Argumentationsaufgaben).

3.2 Theorien zum mathematischen Argumentieren

Die begriffliche Bedeutung des Argumentierens wird folgend auf das mathematische Argumentieren übertragen. Die folgenden Abschnitte verweisen auch auf diesbezügliche Stolpersteine und Grenzen.

In ähnlicher Weise wie Büchter & Leuders (2005) und Hefendehl-Hebeker & Hussmann (2003; vgl. Kap. 3.1) definiert Brunner (2014): «Ein mathematischer Satz gilt dann als wahre Aussage, wenn er aus anderen wahren Aussagen gefolgert werden kann.» (S. 7). Eine solche Argumentationsstruktur gründet in der Mathematik auf Konventionen. Andere Fachbereiche stützen sich auch andere wissenschaftliche Methoden, beispielsweise auf die Empirie (vgl. auch Kap. 3.1).

Brunner bezieht sich hier auf Meyer (2007), der in seiner Dissertation beschreibt, beim Beweisen werde «eine Behauptung in gültiger Weise Schritt für Schritt formal deduktiv aus als bekannt vorausgesetzten Sätzen und Definitionen gefolgert».» (S. 21; zitiert nach Brunner, 2014, S. 7). Die erwähnten Autorinnen und Autoren gehen beim Beweisen also von einer deduktiven Tätigkeit aus, obschon in der Mathematik auch induktive Beweisführungen möglich sind. Beispielsweise kann die Unendlichkeit der Zahlenfolge dadurch bewiesen werden, dass es für jede beliebige Zahl einen Nachfolger gibt.

Für eine deduktive Tätigkeit wurde in den bisherigen Abschnitten ein Kriterium herausgeschält, welches Büchter & Leuders (2005) als angestrebte Rationalität (vgl. Kap. 3.1), Hefendehl-Hebeker & Hussmann (2003) als «bereits gemeinsam anerkannte Aussagen bzw. Normen» (vgl. Kap. 3.1), Brunner (2014) als «wahre Aussagen» und Meyer (2007) als «als bekannt vorausgesetzte Sätze und Definitionen» bezeichnen. Dieses Kriterium könnte indes auch als erstes Merkmal eines mathematischen Argumentes gewertet werden.

Hefendehl-Hebeker & Hussmann (2003; S. 95) erläutern ergänzend:

> Das Argumentieren und Begründen macht einen wesentlichen Teil menschlicher Rationalität aus, wenn wir unter Rationalität die Fähigkeit verstehen, Verfahren des begrifflichen und systematisch begründend oder kritisierend vorgehenden Denkens und Redens über Geltungsansprüche (also Ansprüche auf das Zutreffen von Sichtweisen) zu entwickeln, verfügbar zu haben und sich daran zu halten (vgl. Mittelstrass, 1995/96).

Die Trennlinie zwischen «Rationalität» und «Wahrheit» ist sehr fein, weshalb hier eine der verschiedenen Wahrheitstheorien der Philosophie (Erkenntnistheorien) beigezogen wird. Die Konsenstheorie ist der «Auffassung, dass die Wahrheit einer (wissenschaftlichen) Behauptung davon abhängt, ob sich über diese Behauptung allein durch Argumentation ein allgemeiner Konsens herstellen lässt» (Stangl, 2020, o. S.).

In der Mathematik geht es zwar nicht um eine ontologische Realität, sondern um die Argumentation/Beweisführung innerhalb einer Theorie (eben der Mathematik) mit ihren eigenen Mitteln (Sätze, Axiome, Regeln, Gesetze). Die mathematische Beweisführung beruft sich aber auf Konventionen, während sich weitere Wissenschaften vorwiegend auf die Empirie stützen. Deshalb könnte mathe-

matisches Argumentieren im Sinne der erwähnten Quellen (vgl. Büchter & Leuders, 2005; Hefendehl-Hebeker & Hussmann, 2003; Brunner, 2014; Meyer, 2007; Stangl, 2020) als Begründung einer Sachlage aufgrund von vorhergehenden konsentierten Normen definiert werden.

Brunner (2018) schliesst, dass «beim mathematischen Argumentieren die Argumente aus der Mathematik selbst stammen» müssen (S. 6). Ein mathematisches Argument würde demnach auf ausschliesslich mathematischen Bezügen beruhen (wie eben z.B. auf Sätzen, Regeln, Gesetzen, Axiomen oder Theoremen). Umgekehrt bedeutet dies, dass beim Argumentieren im Alltag subjektive Theorien («alltägliche Mittel») eingesetzt werden können. Kapitel 3.2.2 geht genauer auf solche Eigenheiten des mathematischen Argumentierens und die Abgrenzung zum Argumentieren in anderen Fachbereichen ein.

Der Auffassung von Brunner schliessen sich auch Hess, Blum & Smit (2020) an. Sie betonen das Potential von Lernanlässen zum mathematischen Argumentieren, welches in der Auseinandersetzung mit Sachaufgaben und arithmetischen Aufgaben erfolgt. Sachaufgaben fordern dazu heraus, Sachsituationen bzw. weltliche Fragestellungen mit mathematischen Mitteln zu beantworten. Insofern können sich Argumente auf die Konsequenzen oder die Bedeutung in der Sachsituation oder auf die Berechnungen bzw. die mathematischen Modelle beziehen. Dass sich die Argumente in arithmetischen Aufgaben hauptsächlich auf mathematische Modelle beziehen müssen, wurde oben mit Brunner (2018) geklärt.

Zwei Beispiele für mathematische Modellierung zur Lösung von Argumentationsaufgaben

«Behauptung: Du bist schon mehr als 1000 Tage alt. Kann das stimmen? Begründe». Bei dieser Aufgabe brauchen die Schülerinnen und Schüler einerseits Argumente, die sich auf die Sachsituation beziehen – z.B. «Ich bin 10 Jahre alt» und «Ein Jahr hat 365 oder 366 Tage» – und andererseits auch solche, die mathematische Modelle beanspruchen – z.B. «10 • 365 = 3650» oder «Schon 3 • 365 > 1000».

Eine ausschliesslich *mathematische* Argumentation ist in arithmetischen Aufgabenstellungen möglich, z.B.: «Welche Aufgabe stimmt? Begründe».

A) 100 : 4 = 200 : 8

B) 100 : 4 = 200 : 2

Hier müssen mathematische Bezüge erfolgen, z.B. «100 : 4 = 25 und 200 : 8 = 25, also stimmt A.» oder «100 : 4 = 25 und 200 : 2 ≠ 25, also ist B falsch».

3.2.1 Argumentieren als Prozess

Büchter & Leuders (2005) sowie Hefendehl-Hebeker & Hussmann (2003) beschreiben mathematisches Argumentieren über Merkmale (vgl. Kap. 3.1). Bezold (2012) registriert, dass Argumentieren

häufig im Sinne von Begründen verstanden und in der Literatur zuweilen vom streng deduktiven Beweisen (vgl. auch Kap. 3.1) unterschieden werde (S. 9). Für sie ist Argumentieren aber mehr als reines (deduktives) Begründen, es schliesst auch induktive Möglichkeiten ein (vgl. hierzu auch Kap. 3.2). Dies veranlasst Bezold, das Argumentieren auf eine Prozessschiene zu legen, in welcher es gilt, «mathematische Entdeckungen (Eigenschaften, Zusammenhänge, Lösungen u.v.m.) zu beschreiben (Baustein 1), diese zu hinterfragen (Baustein 2) sowie sie zu begründen bzw. hierfür eine Begründungsidee (Baustein 3) zu liefern» (Bezold, 2012, S. 9 f.). Damit ist die Begründung ein Teil (und zugleich der letzte Schritt) des Argumentierens und nicht mit ebendiesem gleichzusetzen (vgl. Bezold, 2012, S. 9).

In den Handreichungen zum Projekt SINUS (Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts) benennt Bezold (2010) einen vierten Baustein: Das Entdecken von mathematischen Phänomenen (S. 3; vgl. Abbildung 1).

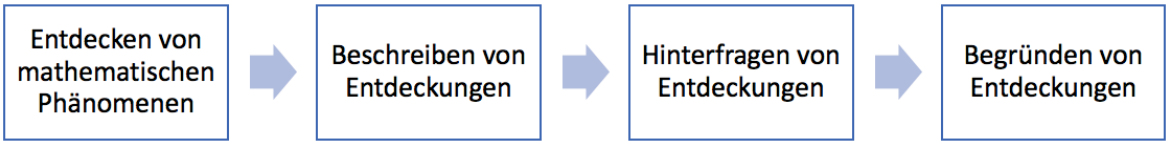


Abbildung 1: Vier Bausteine des Argumentierens (Bezold, 2010, S. 3)

Brunner (2014, S. 30 f.) erachtet Argumentieren und Beweisen – anders als Bezold – als *Unterbegriffen* des Begründens. Sie trennt die beiden Begriffe nicht voneinander, weil diese auf einem Kontinuum liegen würden, welches von alltagsbezogenem Argumentieren bis hin zu formal-deduktivem Beweisen reiche. Demgemäss liegt das Argumentieren zu Sachaufgaben (vgl. Hess, Blum & Smit, 2020; Kap. 3.2) am einen Ende des Kontinuums, am alltagsbezogenen. Das Argumentieren zu arithmetischen Aufgaben (vgl. ebd.) ist am anderen Ende anzusiedeln, also beim formal-deduktiven Beweisen. Oder anders ausgedrückt: In Sachaufgaben begründen die Schülerinnen und Schüler, in arithmetischen Aufgaben beweisen sie. Büchter & Leuders (2005, S. 45) sehen das ähnlich, wenn sie schreiben, dass zwischen Begründen und Beweisen in innermathematischen Situationen keine klare Grenze gezogen werden könne.

In Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit ist die Abgrenzung zwischen «Begründen» und «Beweisen» denn auch nebensächlich. Die Begrifflichkeiten werden aber trotzdem nach dem Verständnis von Hess, Blum und Smit (2020) unterschieden. Das konsens-orientierte Argumentieren mit jeglichen (auch alltäglichen) Argumenten wird als «Begründen» bezeichnet. «Beweisen» hingegen wird in einem engeren Kontext verwendet, so muss das Argument auch über den Konsens hinaus schlüssig sein und bedient sich ausschliesslich innerfachlicher (also mathematischer) Mittel (vgl. Büchter & Leuders, 2005; Brunner, 2014).

Wie Bezold gliedert auch Brunner (2016, S. 37 f.) den Argumentationsprozess in vier Teilkompetenzen (vgl. Abbildung 2), analog Bezolds Bausteinen.

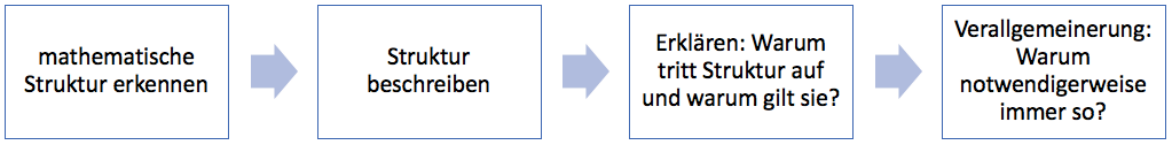


Abbildung 2: Teilkompetenzen des Argumentationsprozesses (vgl. Brunner, 2016, S. 37 f.)

Dazu bemerkt Meyer (2007): «Einer Entdeckung fehlt es ohne Begründung an Sicherheit. Begründungen ohne Entdeckung hingegen verfehlen den Kern des aktiven Lernens.» (zitiert nach Bezold, 2012, S. 10). In der Praxis ist es keine Selbstverständlichkeit, dass Schülerinnen und Schüler mathematische Strukturen auf Anhieb erkennen. Die Ergänzung durch den Baustein des Entdeckens (mathematischer Phänomene) oder die Kompetenz des Erkennens (mathematischer Strukturen) scheint deshalb sinnvoll. Bezold (2010, S. 3) nennt verschiedene Voraussetzungen für den Akt dieses ersten Schrittes: Deren Bewältigung

> erfordert auch Kompetenzen des Problemlösens und der Kreativität. Die Fähigkeit, relevante und irrelevante Informationen unterscheiden zu können, spielt eine bedeutende Rolle. Auch die Kenntnis von spezifischen mathematischen Begriffen, Eigenschaften und Beziehungen stellt u.U. eine notwendige Voraussetzung dar.

Bezolds dritter Baustein enthält das Hinterfragen (vgl. Abbildung 1). Brunner hingegen fasst bereits mit der dritten Teilkompetenz das Erklären und lässt den Schritt des Hinterfragens aus. Im Gegenzug nennt sie als vierte und damit letzte Teilkompetenz die Generalisierung (Verallgemeinerung). Da beide Prozessschritte wichtig zu sein scheinen, könnte ein ergänzendes Modell folgendermassen aussehen (vgl. Abbildung 3):

Abbildung 3: Argumentationsprozess in fünf Schritten (vgl. Bezold, 2010, S. 3; Brunner, 2016, S. 37 f.)

Anhand folgender Aufgabenstellung wird ein möglicher Argumentationsprozess beispielhaft umrissen:

«In eine Schachtel passen 7 Packungen Kaugummi mit insgesamt 28 Kaugummistreifen. Urs stellt das in einer Tabelle dar:

Packungen Kaugummi	7	14	35	49	63	70
Anzahl Kaugummistreifen	28	56	140	196	252	280

Matthias behauptet, die Tabelle hätte einen Fehler. Hat er recht? Begründe.»

Erkennen/Entdecken: Die Tabelle weist eine multiplikative Struktur in Zeilen und Spalten auf, die Proportionalität. Diese Struktur gilt es im ersten Schritt zu erkennen/entdecken.

Beschreiben: Nun müssen die Entdeckungen beschrieben werden, also die multiplikative Struktur und der Zusammenhang zwischen Mal, Plus und Minus. Hierzu sollen insbesondere die Bezüge zwischen 1• / 2•, 1• / 5•, 5• / 7• und 10• / 9• gezeigt werden. Zusätzlich beschreiben die Schülerinnen und Schüler sachbezogene Erkenntnisse (z.B. «Urs schreibt oben immer eine Zahl der Siebnerreihe, weil in eine Schachtel 7 Packungen Kaugummi passen.»).

Hinterfragen: Die Entdeckungen werden hinterfragt (z.B. «Stimmt die Tabelle?»). Dazu wird ein Abgleich der beschriebenen Strukturen mit der Tabelle vollzogen (z.B. «Das Verhältnis der beiden Zeilen zueinander ist tatsächlich überall dasselbe, nämlich mal 7. Die Proportionalität ist also gegeben.»).

Begründen/Erklären: Anschliessend werden die Entdeckungen aufgrund der im der im Vorfeld beschriebenen Erkenntnisse begründet (z.B. «Die Tabelle stimmt, weil das Verhältnis der beiden Zeilen zueinander überall dasselbe ist, nämlich mal 7.» oder «Matthias sagt das, weil nicht alle Zahlen der Siebnerreihe vorkommen. Die Tabelle stimmt aber, weil die Proportionalität gegeben ist.»).

Generalisieren: Aussagen wie «Es sind immer viermal mehr Streifen als Packungen, weil in einer Packung 4 Streifen drin sind.» oder «Das Verhältnis der Spalten muss in beiden Zeilen gleich sein. Ich muss also oben und unten gleich viel multiplizieren oder dividieren.» generalisieren die Argumente der Schülerinnen und Schüler.

Die Verwendung der Fachsprache in allen Teilschritten trägt zur Nachvollziehbarkeit bei und ist deshalb zentral. Im Lehrplan sind für jeden Kompetenzbereich unter dem Handlungsaspekt «Operieren und Benennen» die verlangten Fachbegriffe erwähnt. Für das oben genannte Beispiel wären dies u.a.: ist/wird mehr/weniger, plus, minus, mal, durch, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Summand, Summe, Differenz, Faktor, Produkt, Quotient, Proportionalität (LP21, 2020).

3.2.2 Eigenheiten des mathematischen Argumentierens

Brunner (2018, S. 26) differenziert das mathematische Argumentieren mit einem aktiv produzierenden und einem passiv nachvollziehenden bzw. rezeptiven Aspekt. «Die aktive Seite besteht in der Konstruktion eines Arguments, die passive hingegen im Nachvollziehen eines vorgebrachten Arguments». Es ist nicht unproblematisch, das Rezipieren als passive Leistung zu deklarieren, weil auch Hören und Lesen aktiven Konstruktionsleitungen entsprechen. Deshalb schlage ich vor, auch beim mathematischen Argumentieren zwischen *produktiv* und *rezeptiv* (anstelle von aktiv und passiv) zu unterscheiden. Dies erfolgt ebenso in der Sprachdidaktik (Fremdsprachen und Deutsch). Darin werden mündliche und schriftliche Grundfertigkeiten nach Produktion und Rezeption unterschieden (vgl. Huneke & Steinig, 1997, S. 91; Tabelle 1).

Es wird zudem empfohlen, rezeptive (A1) vor produktiven (A2) Tätigkeiten einzuführen bzw. mündliche (B1) vor schriftlichen (B2). Dabei wird weder der Rezeption noch der Mündlichkeit der Vorrang gewährt. Während es bei den rezeptiven Fertigkeiten vor allem um die Aufnahme, Verarbeitung und das Verstehen von Reizen geht, wird bei den produktiven Fertigkeiten aktiv Material generiert. Produktive Tätigkeiten sind dadurch aufwändiger und komplexer als rezeptive, insbesondere weil das Produkt inhaltlich und sprachformal stimmig sein muss (vgl. Portmann, 1993, S. 97). Den Schülerinnen und Schülern liegen mündliche Tätigkeiten oftmals näher als schriftliche, weil sie mit dem mündlichen Kompetenzerwerb viel früher in ihrem Leben begonnen haben.

Tabelle 1: Sprachliche Grundfertigkeiten (vgl. Huneke & Steinig, 1997, S. 91)

Grundfertigkeiten	Rezeptiv (A1)	Produktiv (A2)
Mündlich (B1)	Hören	Sprechen
Schriftlich (B2)	Lesen	Schreiben

Beim *produktiven* Argumentieren wird die Frage nach dem «Warum» gestellt und bestmöglich beantwortet. Als Ausgangslage braucht es eine «fehlende Gewissheit, ob etwas so *ist* und immer so sein *muss* [Hervorhebungen im Original] oder ob es auch anders sein könnte» (Brunner, 2018, S. 9). Beim mathematischen Argumentieren geht es also nicht nur um die Überprüfung, sondern auch um die Begründung eines Sachverhaltes.

Brunner (ebd.) schlägt vor, die Beantwortung von «Warum-Fragen» bereits mit Schülerinnen und Schülern des ersten Zyklus gezielt zu üben. Sie belegt dies mit einer Einführung von «Weil-Geschichten», mittels welchen das Begründen von Sachzusammenhängen erlernt wird. Es gehe darum, «eine *mathematische* Warum-Frage mit einer *mathematischen* [Hervorhebungen im Original] Weil-Geschichte beantworten zu lernen». Brunner bezieht sich damit explizit auf die innerfachliche oder innermathematische Argumentation (vgl. Kap. 3.2). Auch Hefendehl-Hebeker & Hussmann (2003, S. 94) verweisen auf Warum-Fragen: «Die Warum-Frage ist der Beginn einer Suche nach Gewissheit. Diese bricht aus einem bestehenden Zustand individueller bzw. kollektiver Überzeugung auf, erhebt begründete Zweifel und betreibt 'Forschungen', die die Anlässe der Zweifel beseitigen sollen, um zu neuen Gewissheiten zu gelangen». Ob die Beantwortung einer Warum-Frage bereits als Argumentieren gewertet werden kann, hängt davon ab, ob und von welcher kriterienorientierten (vgl. Kap. 3.2) oder prozeduralen Theorie ausgegangen wird (vgl. Kap. 3.2.1). Unabhängig davon unterstützt das Beantworten von Warum-Fragen den Kompetenzaufbau zum mathematischen Argumentieren, weil in diesem die Sprache eine bedeutende Rolle spielt (vgl. Kap. 3.3.1).

Büchter & Leuders (2005, S. 44) weisen darauf hin, «dass mathematische Argumentationen sich nicht prinzipiell von anderen Argumentationen unterscheiden». Bei Ersteren stünden allerdings die

Kohärenz und Rationalität mehr im Fokus. Auf Brunners Kontinuum (vgl. Kap. 3.2.1) wäre das mathematische Argumentieren näher beim Beweisen anzusiedeln, weil es durch die gesteigerte Kohärenz und Rationalität – im Vergleich mit dem alltäglichen Argumentieren – formal-deduktiv besser nachvollziehbar ist. In diesem Sinne führen Büchter & Leuders (2005, S. 48) weiter aus: «Die für die Mathematik wohl charakteristischste Form des Argumentierens ist das *Führen von Beweisen* [Hervorhebung im Original]». Vergleicht man diesen Standpunkt mit dem differenzierteren Ansatz von Hess, Blum & Smit (2020; vgl. Kap. 3.2), dann beziehen sich Büchter & Leuders insbesondere auf arithmetische und weniger auf Sach-Aufgaben. Die kommenden Kapitel werden sich vorwiegend an das mathematische Argumentieren im Kontext von Sachaufgaben richten, weil die Intervention im FEMAR-Projekt hauptsächlich darauf fokussierte.

Modellierung

In der Mathematikdidaktik hat sich im Bereich des Sachrechnens die Theorie der sogenannten Modellierung durchgesetzt (Müller & Wittmann, 1984, S. 253; vgl. Hess, 2012, S. 203). Wenn Schülerinnen und Schüler an einer Sachaufgabe mit Umweltbezügen arbeiten, dann müssen sie die Sachstruktur dieser zunächst einmal interpretieren. Diese Sachstrukturen werden in ein mathematisches Modell umgewandelt (Mathematisierung/Modellbildung) und es finden Berechnungen statt, die interpretiert oder aus denen Folgerungen gezogen werden (können). Schliesslich müssen Fazits (Folgerungen) wieder auf die ursprüngliche Sachsituation bezogen werden, also im Sinne von Antworten, Interpretationen oder Reflexionen. Grundsätzlich formuliert findet ein Wechsel von der Sach- auf die Entwurfsebene (Mathematik) statt, um anschliessend wieder auf die Sachebene zurückzukehren (vgl. Abbildung 4). Während der Sachebene eine konkrete, bedeutungstragende Struktur zugrunde liegt, verlangt die Entwurfsebene eine mathematische Abstraktion der Sache. Die Abstraktion erlaubt, die Mathematisierung oder die Lösungswege auf analoge Sachsituationen zu transferieren bzw. zu generalisieren.

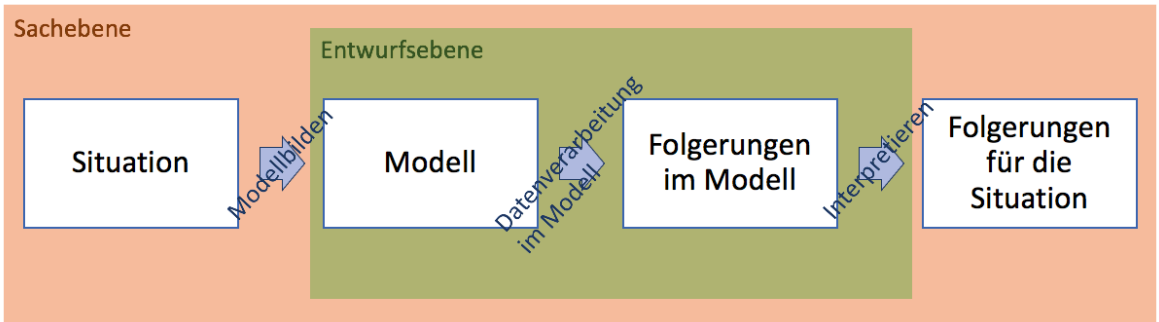


Abbildung 4: Modellierungen (vgl. Müller & Wittmann, 1984, S. 253; Hess, 2012, S. 203)

Folgendes Beispiel veranschaulicht die Modellierung. «Im Restaurant Krone kostet 1 Kugel Glace 2.80 Fr. Mit Rahm kostet es 50 Rappen mehr. Anna behauptet, dass man mit 20 Fr. höchstens 7 Kugeln kaufen kann. Hat Anna recht? Begründe.».

Die Modellbildung setzt das Erkennen der Sachstrukturen voraus, damit sie in mathematische Strukturen überführt werden können. Durch die Abstraktion (Modellbildung) wechseln die Schülerinnen und Schüler von der Sach- auf die Entwurfsebene, auf welcher sie anschliessend rechnen (Datenverarbeitung im Modell). Im Beispiel lassen sich verschiedene Berechnungen anstellen (mit/ohne Rahm). Aufgrund der Resultate werden Folgerungen im Modell angestellt (die eine Mathematisierung erfolgte mit dem Rahmzuschlag und die andere ohne). Die Folgerung auf die Sachsituation kann lauten: «Das Geld reicht nur, wenn Anna auf den Rahm verzichtet». Es darf also gefolgert werden, dass Anna nur dann recht hat, wenn sie keinen Rahm möchte.

Die Modellierung bietet dem mathematischen Argumentieren in Sachaufgaben eine gute Grundlage, weil sie die Interpretation von Sach- und mathematischen Strukturen explizit macht. Mathematisierungen und Interpretationen fallen unterschiedlich aus, weil sie je nach Vorwissen der Schülerinnen und Schüler erfolgen. Analog dazu bezeichnet Brunner (2016) das Erkennen mathematischer Strukturen als erste Teilkompetenz des mathematischen Argumentierens und sie verweist ebenso auf das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler (vgl. Kap. 3.1). In diesem Bedeutungszusammenhang spricht die Mathematikdidaktik davon, dass gute Argumentationsaufgaben natürlich differenzierend sind oder sein sollen. Natürliche Differenzierung bedingt ein Lernangebot, das unterschiedliche Lösungen, Lösungsansätze oder Darstellungsmittel zulässt und damit unterschiedlich herausfordert (vgl. Kap. 3.3). Es sind also die Möglichkeiten und Bedingungen bzw. das Vorwissen und die Präferenzen der Schülerinnen und Schüler, welche deren Lern- und Lösungsweg – bewusst oder unbewusst – «natürlich» bestimmen (vgl. z.B. Heymann, 2010, S. 8; Krauthausen & Scherer, 2010, S. 6; Hess, 2012, S. 217).

3.3 Mathematisches Argumentieren in der Primarschule

Im Primarschulunterricht spielen subjektive Theorien der Lehrperson eine zentrale Rolle (vgl. Kap. 2). In der Aus- oder Weiterbildung werden diese mit objektiven Theorien – z.B. dem Lehrplan und fachdidaktischen Theorien – abgeglichen. Die folgenden Abschnitte umreissen fachdidaktische Überlegungen zum mathematischen Argumentieren in der Primarschule.

Lernen als Kompetenzerwerb

Spätestens seit der Einführung des Lehrplan 21 ist ein paradigmatischer Wandel vom «Zielorientierten Lernen» zum «Lernen als Kompetenzerwerb» im Gang. Inhalte dienen weiterhin dem Kompetenzaufbau, allerdings in einer anderen Funktion. Diesen Wandel brachte auch die Kultusministerkonferenz (KMK; 2005) zum Ausdruck:

> Das Mathematiklernen in der Grundschule darf nicht auf die Aneignung von Kenntnissen und Fertigkeiten reduziert werden. Das Ziel ist die Entwicklung eines gesicherten *Verständnisses* [Hervorhebung im Original] mathematischer Inhalte. Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen [Problemlösen, Kommunizieren, Argumentieren, Modellieren und Darstellen; Anmerkung T.H.] verdeutlichen,

> dass die Art und Weise der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragen ein wesentlicher Teil der Entwicklung mathematischer Grundbildung ist. Deren Entwicklung hängt nicht nur davon ab, welche Inhalte unterrichtet wurden, sondern in mindestens gleichem Maße davon, *wie* [Hervorhebung im Original] sie unterrichtet wurden, d. h. in welchem Maße den Kindern Gelegenheit gegeben wurde, selbst Probleme zu lösen, über Mathematik zu kommunizieren usw. (KMK, 2005, S. 6).

Auch Bezold (2012, S. 20) spricht sich für eine «Förderung prozessbezogener Kompetenzen» an den Primarschulen aus. Damit meint sie wohl das im Zitat kursiv gesetzte «wie». Hess (2012, S. 228) wird noch etwas konkreter: Die Kompetenzorientierung

> betont ein gemeinsames Lernen und rückt separate Förderprogramme in den Hintergrund. Anstatt Kinder dort abzuholen, wo sie stehen», orientiert sie sich an substanziellen Aufgaben, welche *allen* ermöglichen, *eigene* [Hervorhebungen im Original] Zugänge zu finden und Erreichbares anzustreben […]. Der Ansatz bildet einen Gegenpol zur kurzsichtigen Ergebnis-, Produkt- oder Aufgabenorientierung.

Der Aufbau von Argumentationskompetenzen geht davon aus, dass das Argumentieren eine Tätigkeit (wie?) anstelle einer blossen Aneignung oder – negativ formuliert – Abarbeitung von Inhalten (was?) sei. Dieses Tun und Können wird im Sinne des Kompetenzaufbaus herausgefordert und begleitet. Krieg & Hess (2017, S. 31) definieren einige Kriterien für Aufgaben, welche kompetenzorientiertes Lernen auszulösen vermögen. Solche sollen «individuelle Zugänge und Herausforderungen bieten sowie unterschiedliche Lösungswege, Prozessschritte, Lernergebnisse und Erkenntnisse ermöglichen. Damit sind Ansprüche an die Reichhaltigkeit der Aufgaben und an eine natürliche Differenzierbarkeit [vgl. Kap. 3.2.2] erhoben.».

Reichhaltige oder gute Aufgaben bieten «vielfältige Zugänge und Herausforderungen» und ermöglichen «Einsichten in mathematische Muster und Beziehungen». Sie werden gekennzeichnet durch «Variabilität im Zahlenraum, variable Lösungswege, unterschiedliche Lösungen, weiterführende Fragen, verschiedene Wissensrepräsentationen und Übersetzungen, mathematisch bedeutungsvolles Lernen und aktives Lernen» (Hess, 2012, S. 214 f.).

Die KMK (2005, S. 7) überstellte den inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen einige allgemeine Kompetenzen (Problemlösen, Kommunizieren, Argumentieren, Modellieren und Darstellen). In diesem Sinne erwarten Krieg & Hess (2017, S. 31) von Aufgaben, dass sie dem kompetenzorientierten Lernen dienlich sind und «Individualisierungen ermöglichen. Die spezifischen Übungen [Automatisieren oder Einüben von Strategien; Anmerkung T.H.] dienen Kompetenzerweiterungen insofern, als sie das Faktenwissen abrufbar machen oder Prozeduren ökonomisieren». Diese Aussage schliesst den Kreis zwischen Inhalten und Tätigkeiten: Die Kompetenzen werden am Inhalt aufgebaut und anschliessend gebraucht, um das grundlegende Wissen und Können anzuwenden.

Kompetenzen im Lehrplan 21

Krieg & Hess (2017, S. 31) verweisen auf einen Grundgedanken der KMK und damit auch auf den Lehrplan 21, nämlich, «dass die Qualität *und* [Hervorhebung im Original] die Inszenierung der Aufgaben aufeinander abgestimmt sein müssen». Der Lehrplan 21 unterscheidet zwischen Kompetenzbereichen (Inhalten, was?) und Handlungsaspekten (Tätigkeiten, wie?) und stellt diese in einer Matrix dar (LP21, 2020; vgl. Tabelle 2). Der Lehrplan 21 ist also nicht linear angedacht. Obschon die Bezeichnungen teilweise divergieren, weisen die Bildungsstandards der KMK und die curriculare Struktur des Lehrplan 21 in die gleiche Richtung.

Tabelle 2: Die Kompetenzbereiche und Handlungsaspekte im Überblick (LP21, 2020)

		Kompetenzbereiche		
		Zahl und Variable	Form und Raum	Grössen, Funktionen, Daten und Zufall
Handlungsaspekte	Operieren und Benennen			
	Erforschen und Argumentieren			
	Mathematisieren und Darstellen			

Tabelle 3 (S. 15) belegt, dass sich die Teilschritte der beschriebenen (Prozess-) Modelle (vgl. Kap. 3.2; Bezold, 2010; Brunner, 2016; Müller & Wittmann, 1984) durchaus im Lehrplan 21 wiederfinden lassen. Entsprechend der anachronistischen Struktur des Lehrplan 21 ist auch der Kompetenzerwerb zum mathematischen Argumentieren nicht geradlinig aufzufassen. Hierauf ist die Mehrfachnennung einiger Teilkompetenzen zurückzuführen. Der Einfachheit halber werden in Tabelle 3 die Kompetenzbereiche nicht einzeln aufgeführt, da Argumentationsaufgaben in allen Teilbereichen des Lehrplan 21 (Zahl &Variable, Form & Raum und Grössen, Funktionen, Daten & Zufall) angesiedelt sein können.

Tabelle 3: Abgleich verschiedener Modelle mit dem Lehrplan 21

Autoren/-innen	Handlungsaspekte LP21		
	Operieren und Benennen	Erforschen und Argumentieren	Mathematisieren und Darstellen
Bezold, 2010, S. 3	» Entdecken von mathematischen Phänomenen » Beschreiben von Entdeckungen	» Hinterfragen von Entdeckungen » Begründen von Entdeckungen	» Beschreiben von Entdeckungen » Begründen von Entdeckungen
Brunner, 2016, S. 37 f.	» Mathematische Struktur erkennen » Struktur beschreiben	» Erklären: Warum tritt Struktur auf und warum gilt sie? » Verallgemeinerung: Warum notwendigerweise immer so?	» Struktur beschreiben » Erklären: Warum tritt Struktur auf und warum gilt sie? » Verallgemeinerung: Warum notwendigerweise immer so?
Argumentationsprozess in fünf Schritten	» Erkennen/Entdecken » Beschreiben	» Begründen/Erklären » Hinterfragen » Generalisieren	» Beschreiben » Begründen/Erklären » Generalisieren
Müller & Wittmann, 1984, S. 253	» Modellbilden » Datenverarbeitung im Modell » Interpretieren	» Datenverarbeitung im Modell » Interpretieren	» Modellbilden » Datenverarbeitung im Modell

Sach- und Argumentationsaufgaben

Im FEMAR-Projekt enthielt die Intervention vorwiegend Sachaufgaben, weshalb die Bezeichnung Argumentationsaufgaben im Folgenden (wenn nicht anders ausgewiesen) Sachaufgaben meint. Diese Einschränkung schliesst nicht aus, dass auch an arithmetische Aufgaben «Warum-Fragen» gestellt werden können (vgl. Kap. 3.2.2) und sie enthält implizit, dass sich nicht alle Sachaufgaben als Argumentationsaufgaben eignen (vgl. Kap. 3.3.1).

Winter (1989, S. 114) weist dem Begriff «Sachrechnen» die Bedeutung «elementare[r] angewandte[r] Mathematik» zu. In seinen früheren Schriften unterschied er zwischen der *Anwendungs*- und der *Strukturorientierung*. Erstere meint die Verbindung mit bedeutsamen Alltagsituationen, letztere fokussiert innermathematische Strukturen (vgl. Winter, 1987; Hess & Streit, 2015, S. 115). Hess & Streit (ebd.) schliessen «für die frühe Begegnung mit Mathematik, dass diese in für Kinder bedeutsamen Situationen herausfordern soll. Andererseits braucht es auch rein mathematische Auseinandersetzungen, losgelöst von Sachbezügen» (vgl. Winter, 1987; Royar & Streit, 2010, S. 23 ff.). In den Worten von Krieg & Hess (2017, S. 14) werden Sachaufgaben also dem Anspruch des Erfahrungsbezugs und des Anwendens (auf Sachsituationen) gerecht.

Maass (2019, S. 104) differenziert das Sachrechnen mit drei Absichten: Lernprinzip, Lernstoff und Lernziel (vgl. Franke & Ruwisch, 2010; Winter, 2003):

> 1. Sachrechnen als Lernprinzip: Durch die Anbindung an die Realität werden mathematische Begriffe, Operationen und Zusammenhänge besser verstanden und durchdacht und die Lernenden erwerben z.B. ein besseres Verständnis, wann man welche Operation einsetzt. So wird z.B. durch die Aufgabe: «Susi hat 7 Autos und Marek hat 3. Wie viele haben beide zusammen?» die Grundvorstellung, dass das Addieren Zusammenfügen bedeuten kann, gefördert.
>
> 2. Sachrechnen als Lernstoff: Beim Sachrechnen müssen die Schülerinnen und Schüler mit Grössen und ihren Einheiten umgehen und erwerben Kenntnisse im Gewinnen von Daten (Zählen, Messen, Schätzen) sowie der Darstellung und Verarbeitung von Daten (Symbolisieren, Zeichnen, Sortieren, Vergleichen).
>
> 3. Sachrechnen als Lernziel: Durch authentische Anbindungen an die Realität lernen die Kinder, Mathematik in der Welt anzuwenden, sie erschliessen sich ihre Umwelt, sie entwickeln Kompetenzen im Problemlösen und entwickeln ein Bewusstsein für die Relevanz von Mathematik.

Argumentationsaufgaben mit Sachbezug verfolgen alle drei Absichten gleichermassen. Anhand der Glace-Aufgabe (vgl. Kap. 3.2.2, Modellierung) lässt sich dies aufzeigen: So entwickeln die Schülerinnen und Schüler Grundvorstellungen (1; u.a. Grundoperationen), sie erarbeiten Kompetenzen (2; u.a. Rechnen mit Geld) und Lösungsstrategien (3; u.a. Rechnung aus Sachaufgabe herauslesen) und erkennen den Stellenwert der Mathematik (3; u.a. Mathematik im Alltag).

3.3.1 Darstellungswechsel

Schülerinnen und Schüler zeigen ihre im Argumentationsprozess gemachten Entdeckungen auf unterschiedlichen Wegen, darunter sprachlich (mündlich oder schriftlich) oder bildlich (beispielsweise als Skizze). In diesem Ausdruck muss die Erkenntnis nachvollziehbar dargestellt sein, damit er als Argument gezählt werden kann. Für die Aufgabe «Eine Packung Katzenfutter kostet 7 Franken. Susi will drei Packungen kaufen. Reichen die 20 Franken, die sie von der Mutter bekommen hat?» wäre die Skizze einer Packung Katzenfutter beispielsweise *kein* Ausdruck des Erkennens von mathematischen Strukturen.

Die folgenden Abschnitte gehen der Frage nach, wie sich das Erkennen von mathematischen Strukturen und die anschliessende nachvollziehbare Darstellung gezielt üben lassen. Sie zeigen die Bedeutung des Darstellungswechsels auf, womit der Übersetzungsprozess zwischen verschiedenen Darstellungsformen gemeint ist. Die Begriffe Darstellungswechsel und Übersetzungsprozess werden synonym verwendet.

Beim Argumentieren werden mathematisch-symbolische Beziehungen und diesbezügliche Vergleiche oder Erkenntnisse in eine sprachliche Darstellungsform übersetzt. Noch etwas grundsätzlicher lassen sich mathematisch-symbolische Zusammenhänge nicht nur sprachlich, sondern auch bildlich (z.B. Situationsbilder, Skizzen, Grafiken, Diagramme) oder durch konkrete Sachsituationen darstellen. Beim Argumentieren sind sprachliche Repräsentationen vorherrschend, häufig werden sie aber vermischt mit bildlichen oder konkreten Ergänzungen. Dies insbesondere deshalb, weil die Sprache als rezeptives (sprachlich dargestellte Sachaufgaben bzw. Rechengeschichten) und als produktives Argumentationsmittel äusserst anspruchsvoll ist.

Schuler (2019, S. 25) schreibt «Rechengeschichten […] eine zentrale Rolle beim Aufbau des Operationsverständnisses» zu. «Dabei geht es nicht nur darum, Rechengeschichten zu lösen, sondern dass verschiedene Darstellungen der Rechengeschichte (Sprache, Bild, Gleichung) einander zugeordnet und ineinander überführt werden können, sie also als äquivalent angesehen werden» (Schuler, 2019, S. 25). Weiter betont Schuler (2019): «Ein Kind hat dann ein Verständnis für eine Rechenoperation (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) aufgebaut, wenn es zwischen verschiedenen Darstellungsformen – Handlung, bildliche, sprachliche, symbolische Darstellung – hin und herübersetzen kann.» (S. 27; vgl. Gerster & Schultz, 2000). Rechengeschichten sind als Sachaufgaben zu verstehen, die sprachlich, bildlich oder als konkrete Sachsituation dargeboten werden. Die Bezeichnung könnte also zu «Rechengeschichten, Rechenbilder und konkrete Sachsituationen» erweitert werden.

Leuders (2019, S. 175) stützt Schulers Ausführungen: «Um etwas über Vorstellungen und Verständnis der Kinder zu erfahren, eignen sich besonders die Übersetzungsprozesse zwischen symbolischer, bildlicher, sprachlicher und handelnder Darstellung». Schuler und Leuders beziehen sich in ihren

Ausführungen auf das sogenannte EIS-Prinzip (Bruner, 1971). Beim diesem handelt es sich um ein didaktisches Prinzip, welches die verschiedenen Darstellungsformen im Mathematikunterricht aufzeigt und in Relation setzt. Bruner unterscheidet darin die enaktive (handlungsbezogene), ikonische (bildliche) und symbolische (sprachliche) Ebene. Jede Darstellungsform bedient sich eigener Darstellungsmittel (vgl. Tabelle 4, S. 19).

Interessant ist, dass sowohl Schuler als auch Leuders die mathematisch-symbolische Ebene zusätzlich zu den anderen drei Ebenen erwähnen. Hess hat bereits 2003 vorgeschlagen, das EIS-Prinzip durch ein weiteres S zu ergänzen: «Bruner bezieht die symbolische Form der Wissenserschliessung und -darstellung auf die Sprache. Es erscheint mir in der Mathematik-Didaktik sinnvoll, zwischen der Verbalsprache und der mathematischen Symbolsprache zu unterscheiden (z.B. in Zusammenhang mit Textaufgaben)» (Hess, 2003, S. 77) und damit das EIS- zu einem EISS-Prinzip zu erweitern. Die beiden «S» differenzieren also zwischen der Sprache (im Brunerschen Sinne) und der formal-mathematischen Symbolik.

Mit «Verbalsprache» meint Hess hier sprachlich dargestellte Sachsituationen, was auf eine sachbezogene Verbalisierung der mathematischen Symbolsprache hindeutet. Die Sachebene ist konkreter als die mathematisch-symbolische Ebene, weshalb der Begriff der Verbalsprache im Folgenden im Sinne von mündlich (und schriftlich) formulierten Begründungszusammenhängen verwendet wird und sich auf eine sachbezogene und auf eine argumentativ ausgerichtete Versprachlichung mathematischer Symbole und Strukturen bezieht. Solche durch die Schülerinnen und Schüler formulierten Begründungszusammenhänge offenbaren mathematische Erkenntnisse und Verstehensleistungen.

Tabelle 4: Darstellungsformen und –mittel im EISS-Prinzip

Darstellungsform	Darstellungsmittel	Beispiele
Enaktiv	Handelnd mit konkreten Situationen und Materialien	Darstellung einer Sachaufgabe mit Legofiguren
Ikonisch	Bildlich durch Skizzen, Bilder, Graphen oder Diagramme	Darstellung eines mathematischen Terms durch eine Grafik oder Skizze
Sprachlich-symbolisch	Sprachlich sprachlich dargestellte Sachaufgabe oder sprachlich formulierte Argumentationen	Klassische sog. Textaufgaben
Mathematisch-symbolisch	Formal-symbolische Zahlen und Terme	Abstrakte Zahlen, mathematische Zeichen, Terme

Die Unterscheidung zwischen der reinen Versprachlichung und den Begründungszusammenhängen ist folgendermassen zu verstehen: Das Erzählen einer Rechengeschichte zu einem Term stellt beispielsweise zwar eine Verbalisierung der mathematischen Zusammenhänge dar, erst die Stützung durch Einbezug von genormten Aussagen (vgl. Kap. 3) lässt daraus allerdings den Begründungszusammenhang erschliessen. Es müssen also auf mathematischen Konventionen basierende Aussagen in die Erzählung eingebunden werden, um eine nachvollziehbare Begründung darzulegen.

Hess (2021, o. S.) beschreibt weiter: «Manche Kinder sind dringend auf konkrete Handlungs- und Anschauungsmaterialien angewiesen, damit sie abstrakte Zahlbeziehungen nutzen, erforschen und begründen können. Es ist sinnvoll, deren gezielte Ablösung durch Lernanlässe mit *vorgestellten* [im Sinne von mentalen Vorstellungen; Anmerkung T.H.; Hervorhebung im Original] Handlungen und Wahrnehmungen einzuleiten. Darin werden Kinder herausgefordert, Anzahlen visuell und mental zu organisieren» (vgl. Hess & Wälti, 2009, S. 48-52; Hess, 2012, S. 11; Hess, 2016, S. 119-152). Es ist also eines der Ziele des Mathematikunterrichts, dass die Schülerinnen und Schüler von den konkreten Handlungen und anschaulichen Bildern hin zu mentalen Vorstellungen gelangen. In einem weiteren Schritt sind die Verbalisierung und schliesslich die Verschriftlichung dieser Vorstellungen für die Schülerinnen und Schüler eine wichtige Form des Erkenntnisnachweises.

Stellenwert der Sprache im Argumentationsprozess

Es kann nicht jede Versprachlichung als Begründung gewertet werden – dazu müssen verschiedene Kriterien gegeben sein (vgl. oben und Kap. 3). Trotzdem ist die Versprachlichung (mündlich oder

schriftlich) der Übersetzungsprozesse für eine Argumentation unabdingbar. Solange keine solche Versprachlichung stattfindet, sind die durch den Darstellungswechsel gewonnenen Erkenntnisse für Aussenstehende nicht nachvollziehbar (eines der wichtigsten Kriterien des Argumentierens). Während also der Übersetzungsprozess an sich vor allem dem persönlichen Erkenntnisgewinn dient, kann einzig die sprachliche Begleitung den Argumentationsaspekt abdecken.

Wollring (2009, S. 15) bezeichnet hierzu: «Wir vertreten die Auffassung, dass als Artikulationen Handeln, Sprechen und Schreiben insgesamt den Unterricht bestimmen sollten. Für die meisten Kinder gehen Kompetenzen, die sich in Handlungen äussern, den Kompetenzen in mündlichen und schriftlichen Äusserungen zeitlich weit voraus …» (vgl. Fetzer, 2011). Dieses Zitat könnte insofern missverstanden werden, als das EISS-Prinzip einen linearen Prozess darstellen würde. Aber auch Wollring meint damit nicht, dass die Schülerinnen und Schüler schrittweise oder sukzessive vom handelnden hin zum formal-symbolischen Rechnen geführt werden sollen. Die Autoren und Autorinnen in der Fachliteratur sind sich insofern einig, als es um flexible Übersetzungen von jeder in jede Darstellungsform gehen muss, um Vorstellungen zu entwickeln und Verstehensakte herauszufordern und zu erzeugen.

Sprache als schwieriges und zu übendes Darstellungsmittel

Auch Brunner & Fischer (2018) betonen, dass die Schülerinnen und Schüler schon früh an die sprachlichen Mittel des Argumentierens herangeführt werden sollen (S. 13). «Um zu argumentieren, brauchen wir spezifische sprachliche und logische Kompetenzen, welche die Kinder zuerst erwerben müssen.» (Brunner & Fischer, 2018, S. 13). Eine mögliche Unterstützung, welche von Brunner und Fischer in diesem Kontext genannt wird, ist das sogenannte «Argumentierpuzzle». Dabei handelt es sich um die «Einführung von drei Teilen eines Arguments in Form von Puzzleteilen: Behauptung, weil, Begründung.» (Brunner & Fischer, 2018, S. 13). Dieses Argumentierpuzzle ist eine von vielen Möglichkeiten, um mit den Schülerinnen und Schülern den sprachlichen Ausdruck ihrer Erkenntnisse zu üben (vgl. auch Kap. 3.2.2; «Warum-Fragen»).

Tabelle 4 zeigt mögliche Aufgabenstellungen unter Einbezug verschiedener Darstellungsformen und -mittel. Im Folgenden wird ein Ansatz vorgestellt, der das Tun von Kindern eindeutiger ins Zentrum stellt.

Dazu lohnt es sich, noch einmal auf Schuler (2019) und Leuders (2019) zurückzukommen. Die beiden streichen die Bedeutung der Übersetzungsprozesse zwischen den verschiedenen Darstellungsformen hervor und erklären, dass das Verständnis und die mentalen Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler durch ebensolche Übersetzungsprozesse sichtbar würden (S. 25 und S. 175).

Im folgenden Lernanlass stehen ebensolche Übersetzungsprozesse im Fokus. Die schriftsprachliche Sachaufgabe lautet: «Frau Meier will nächstes Jahr ein Kino eröffnen. Im neuen Saal wird es neun Reihen mit jeweils acht Sesseln geben. Wie viele Sessel muss Frau Meier bestellen?»

Möglicher Wechsel auf die enaktive Ebene: Die Schülerinnen und Schüler spielen die Situation mit Legofiguren und -stühlen nach (vgl. Abbildung 5 und Abbildung 6).

Abbildung 5: Legofigur "Frau Meier"

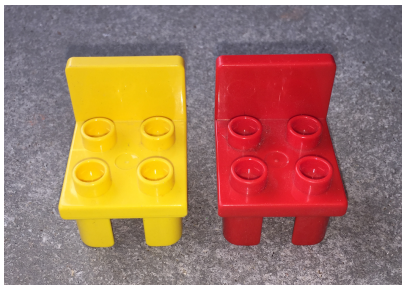


Abbildung 6: Legostühle "Kinosessel"

Möglicher Wechsel auf die ikonische Ebene: Die Schülerinnen und Schüler legen die beschriebene Situation mit Wendeplättchen oder stellen diese im Hunderterpunktefeld dar (vgl. Abbildung 7 und Abbildung 8).

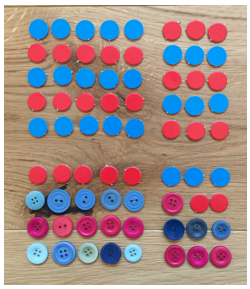


Abbildung 7: Wendeplättchen "Kinosaal"

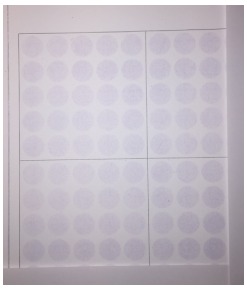


Abbildung 8: Hunderterpunktefeld "Kinosaal"

Möglicher Wechsel auf die mathematisch-symbolische Ebene: Die Schülerinnen und Schüler schreiben die Rechnung zur beschriebenen Situation auf ($9 \cdot 8 = 72$).

Natürlich kann die Aufgabe auch auf einer anderen als auf der sprachlichen Ebene dargeboten werden, z.B. als konkrete Sachsituation (enaktiv) oder als Bild (ikonisch). Tabelle 5 zeigt grundsätzliche Möglichkeiten der flexiblen Übersetzung zwischen den Darstellungsformen.

Tabelle 5: Darstellungswechsel

Von	Nach	Mögliche Aufgabenstellung
enaktiv	ikonisch	Zeichne die Sachsituation.
enaktiv	math.-symb.	Schreibe eine Rechnung bzw. Rechnungen zur Sachsituation.
enaktiv	sprachl.-symb.	Erzähle die Sachsituation oder schreibe eine Rechengeschichte dazu.
ikonisch	enaktiv	Spiele mit den Sesseln und Legofiguren eine Geschichte zum Bild mit den Wendeplättchen.
ikonisch	math.-symb.	Schreibe eine Rechnung zum Bild mit den Wendeplättchen.
ikonisch	sprachl.-symb.	Erzähle eine Rechengeschichte zum Bild mit den Wendeplättchen.
math.-symb.	enaktiv	Spiele eine Rechengeschichte zur Rechnung.
math.-symb.	ikonisch	Zeichne Wendeplättchen zur Rechnung.
math.-symb.	sprachl.-symb.	Erzähle eine Rechengeschichte zur Rechnung «9 • 8 = 72».

Begleitend zum Beispiel und den möglichen Darstellungswechseln (vgl. Tabelle 5) sei der Hinweis angebracht, dass die aktive Eigenleistung der Schülerinnen und Schüler im Zentrum stehen muss, weil diese massgeblich für den Erkenntnisgewinn verantwortlich ist. Ein längerfristiges Ziel besteht darin, dass die Schülerinnen und Schüler Darstellungswechsel mental vornehmen bzw. vor dem geistigen Auge durchführen können («so tun als ob»).

3.3.2 Den Argumentationsprozess anregen

Die folgenden Abschnitte zeigen, wie Darstellungswechsel die Schülerinnen und Schüler dabei unterstützen, einzelne Argumentationsschritte (vgl. Kap. 3.2) erfolgreich zu bewältigen. Es wird geklärt, was die Theorie und die Möglichkeiten zur Übersetzung zwischen verschiedenen Darstellungsformen mit dem Argumentieren zu tun haben.

Darstellungswechsel und Modellierung

Bei der Modellierung (vgl. Kap. 3.2.2) sind verschiedene Darstellungswechsel im Spiel. Die Schülerinnen und Schüler bilden anhand einer Darstellungsform ein Modell der erkannten Sachstruktur. Dies machen sie entweder handelnd mithilfe von Darstellungsmitteln oder mental im Kopf. Indem sie die Daten im Modell der Mathematik verarbeiten, können die Schülerinnen und Schüler auf dieser Entwurfsebene Folgerungen ziehen, welche sie schlussendlich durch eine Interpretation sprachlich

auf die Sachebene zurückführen. Anhand der Modellierung ist erkennbar, dass bei Darstellungswechseln die mentale Entwurfsebene effizienter funktioniert als die Sachebene. Es wird kein zusätzliches Material (im Sinne von Darstellungsmitteln) benötigt.

Darstellungswechsel im Argumentationsprozess

Die Entdeckung von mathematischen Strukturen steht an erster Stelle des Argumentationsprozesses (vgl. Kap. 3.2.1). Dieser Prozessschritt wird mittels Darstellungswechsel geübt (vgl. Kap. 3.3.1). Dabei geht es darum, dass die Schülerinnen und Schüler zwischen verschiedenen Darstellungsformen hin- und herwechseln und so ein vertieftes Zahl- und Operationsverständnis erlangen. Ziel ist, dass sie später anhand ihrer mentalen Bilder flexibel rechnen können.

Auf das Erkennen der mathematischen Struktur folgen die Schritte der Versprachlichung und des Beschreibens (vgl. Kap. 3.2.1). Die Versprachlichung der Erkenntnisse kann mündlich oder schriftlich stattfinden (vgl. Kap. 3.3.1). Für einige Schülerinnen und Schüler bietet es sich an, zunächst nach Vorlage zu üben, später dann immer freier – wobei diese Eigenständigkeit von allen Schülerinnen und Schüler angestrebt wird. Beim Darstellungswechsel üben die Schülerinnen und Schüler ihre mündlichen und schriftlichen sprachlichen Kompetenzen, indem sie ihre mathematische Tätigkeit beschreiben.

Feedback und Nachfragen durch Peers und die Lehrpersonen fördern den auf die Beschreibung folgenden Schritt des Hinterfragens (vgl. Kap. 3.2.1). Die Schülerinnen und Schüler verteidigen bestenfalls ihre Entdeckungen und gewöhnen sich an eine kritische Prüfung ihrer Arbeit. Dabei kann die Beschreibung eines zuvor vollzogenen Darstellungswechsels unterstützend wirken.

An letzter, aber dennoch sehr wichtiger Stelle steht die Begründung der entdeckten und anschliessend beschriebenen Strukturen (vgl. Kap. 3.2.1). Dieser Schritt kann durch die Frage nach einer Erklärung (Warum-Frage; vgl. Kap. 3.2.2) herbeigeführt werden. Auch dieser Schritt findet mündlich oder schriftlich sprachlich statt (vgl. Kap. 3.3.1) und die Schülerinnen und Schüler können sich wieder auf Darstellungswechsel beziehen und unterschiedliche Darstellungsmittel (EISS; vgl. Kap. 3.3.1) unterstützend einsetzen.

Zur Generalisierung der Gesetzmässigkeit: Die Schülerinnen und Schüler versetzen sich hierzu in die Metaebene und betrachten die Sachsituation und ihre Variablen erneut (vgl. Kap. 3.2.1). Darstellungsmittel (mental oder real handelnd) können die Generalität vor Augen führen (vgl. Kap. 3.3.1). Diese Generalisierung vervollständigt zwar Brunners Argumentationsprozess, ist aber für eine abschliessende, nachvollziehbare Argumentation zu einer Aufgabe nicht zwingend notwendig. Für die Schülerinnen und Schüler gilt: Je konkreter ein Argument, desto besser kann es auf die vorliegende Situation zurückgeführt werden. Im Gegenzug bedeutet dies aber auch, dass ein Argument umso generalisierbarer wird, je abstrakter es ist.

4 Methoden

Dieses Kapitel umschreibt die methodische Vorgehensweise bei der empirischen Untersuchung. Die Fragestellung und Forschungsmethode werden ebenso beschrieben wie die Erhebungsinstrumente und das gewählte Datenauswertungsverfahren.

4.1 Fragestellung

Das Projekt *Formatives Feedback zum mathematischen Argumentieren (FEMAR)* entspricht einer Interventionsstudie, welche die Wirkung von Lehrpersonen erteilter formativer Feedbacks entlang eines Beurteilungsrasters (Rubric) untersuchte. Die Studie lässt sich im Handlungsaspekt «Erforschen und Argumentieren» des Lehrplans 21 fachdidaktisch verorten (vgl. PHZG, 2020).

Im Rahmen der Datenerhebung wurden halbstrukturierte Interviews mit Lehrpersonen aus der Deutschschweiz zum mathematischen Argumentieren[2] geführt (vgl. Anhang 1). Die Antworten werden folgend präsentiert (vgl. Kap. 5; Anhang 3) und reflektiert (vgl. Kap. 6).

Wie vor allem im Kapitel 3 aufgezeigt, handelt es sich beim mathematischen Argumentieren um ein komplexes Tun. Die Schülerinnen und Schüler müssen vorgängig diverse Kompetenzen erwerben. Die Lehrpersonen ihrerseits brauchen ein eingehendes Wissen bzw. differenzierte subjektive Theorien, um Schülerinnen und Schüler beim mathematischen Argumentieren optimal unterstützen zu können. Es ist ebenso von Interesse, was die Erkenntnisse aus der Analyse der Interviews für den Unterricht bedeuten.

Der Forschungsprozess der vorliegenden Arbeit wird von den folgenden Fragestellungen geleitet:

1. Was wissen praktizierende Lehrpersonen über das mathematische Argumentieren?
2. Wie unterscheiden sich die subjektiven Theorien der Lehrpersonen von fachdidaktischen Kernaussagen?
3. Was bedeuten die Erkenntnisse zu den ersten beiden Fragen für die Unterrichtspraxis und darüber hinaus für die Aus- und Weiterbildung?

4.2 Forschungsdesign: Rahmenbedingungen der Erhebung

Es wurden 27 halbstrukturierte Interviews geführt und anschliessend transkribiert. Die Interviews fanden im November 2019 statt. Die Transkripte sind geglättet und aus der Schweizer Mundart in die Standardsprache übersetzt worden. Aus Datenschutzgründen wurden die Aussagen vollständig anonymisiert (vgl. Leutwyler & Roos, 2017, S. 289 ff.).

[2] Weitere Fragen bezogen sich auf Feedbacks, die Lehrpersonen den Schülerinnen und Schülern zum Argumentieren geben.

Die Interviews führten und transkribierten vorwiegend Studierende der Pädagogischen Hochschulen PH Zug und St. Gallen. In dieser Bachelorarbeit werden auch Aussagen aus Interviews ausgewertet, die nicht von der Autorin geführt und transkribiert wurden. Die Rechte liegen bei den Verantwortlichen des FEMAR-Projektes.

Alle Lehrpersonen der teilnehmenden Klassen besuchten eingangs der Intervention einen eintägigen und ausgangs einen halbtägigen Workshop. Dieser legte den Fokus auf das mathematische Argumentieren und Begründen nach Lehrplan 21. Die Interventionsgruppe wurde ins Thema Feedback und in das Treatment bzw. in einen Rubric, der als Lernsteuerungs- und Beurteilungsraster zum Argumentieren eingesetzt wurde, eingeführt. Die Lehrpersonen der Kontrollgruppe besuchten ebenfalls eine Weiterbildung, diese fokussierte allerdings auf den Handlungsaspekt «Mathematisieren und Darstellen» (vgl. PHZG, 2020).

Die Datenauswertung unterscheidet nicht zwischen Interviewaussagen von Lehrpersonen aus der Interventions- und Kontrollgruppe, weil nicht die Wirkung des Rubrics, sondern das Wissen und die Einstellungen (bzw. subjektive Theorien) von Lehrpersonen zum mathematischen Argumentieren interessiert.

Das FEMAR-Projekt entspricht einer Längsschnittstudie, weil es vor- bzw. nach der Intervention Daten erhob. Die isoliert für die vorliegende Arbeit herausgezogenen Interviewdaten können als Daten aus einer Querschnittstudie bezeichnet werden (vgl. Leutwyler & Roos, 2017, S. 185 ff.).

4.3 Erhebungsinstrumente

Der Interview-Leitfaden wurde im Rahmen des FEMAR-Projektes (vgl. PHZG, 2020) erarbeitet und bei allen 27 Interviews eingesetzt. Die Interviewenden konnten zusätzlich oder vertiefend nachfragen, mit dem Ziel, möglichst viele, verschiedene und aussagekräftige Antworten aus den teilstrukturierten Interviews zu gewinnen (vgl. Leutwyler & Roos, 2017, S. 230 f.).

Die Fragen zum Thema «mathematisches Argumentieren» lauteten:

1. Was ist mathematisches Argumentieren? Was sind Merkmale? Was ist typisch?
2. Was ist typisch im Unterricht, wenn mathematisches Argumentieren stattfindet?
3. Was ist Ihnen wichtig beim Unterrichten des mathematischen Argumentierens?

Die Interviews wurden mit einem Audioaufnahmegerät aufgezeichnet und anschliessend transkribiert.

4.4 Datenauswertungsverfahren

Die Interviewaussagen wurden einer qualitativen Datenanalyse unterzogen. Dies mit dem Ziel, die Vielfalt der Antworten aufzuzeigen (vgl. Leutwyler & Roos, 2017, S. 289 ff.). Es wird also nicht untersucht, wie oft beispielsweise ein Aspekt zum mathematischen Argumentieren genannt wird,

sondern eher, *welche* Merkmale genannt werden. In Kapitel 6 werden die verschiedenen Perspektiven mit jener der Theorie (vgl. Kap. 3) verglichen und Schlussfolgerungen angestellt.

Die Interviews wurden anhand eines eigens für diese Arbeit erstellten Kategoriensystems codiert (vgl. Anhang 2). Dieses stützt sich auf den Interviewleitfaden des FEMAR-Projekts und die erarbeiteten fachdidaktischen Erkenntnisse und Theorien zum mathematischen Argumentieren (vgl. Kap. 3). Das Kategoriensystem wurde zunächst im Sinne einer deduktiven Vorgabe erstellt. Feinere Anpassungen im Sinne induktiver Differenzierungen erfolgten im Verlaufe der Auswertung (vgl. Leutwyler & Roos, 2017, S. 297). Es erfolgte keine Doppelcodierung. Die Sinneinheiten wurden also jeweils nur einer Kategorie zugeordnet.

Die Intra- und Interkoderreliabilität werden üblicherweise durch eine Zweitcodierung sichergestellt (vgl. Leutwyler & Roos, 2017, S. 300). Im Rahmen dieser Bachelorarbeit wird allerdings darauf verzichtet, weil die Ergebnisse einen exemplarischen Status zeigen.

Die Interviews wurden mithilfe einer Textverarbeitungssoftware (MS Word) transkribiert und dann in Sinneinheiten zerlegt. Diese wurden in MS Excel codiert und sortiert. So konnten die Aussagen der Lehrpersonen gebündelt werden. Anschliessend wurden die Interviewdaten qualitativ ausgewertet (vgl. Leutwyler & Roos, 2017, S. 289 ff.). Kapitel 5 zeigt die Ergebnisse, in Kapitel 6 werden sie diskutiert.

4.5 Stichprobe

Die erhobenen Interviewdaten stammen vollumfänglich aus der natürlich angefallenen Stichprobe des FEMAR-Projekts. Diese ist im zweiten Zyklus angesiedelt, also in der 4. bis 6. Klasse. Es wurden 27 Lehrpersonen aus Deutschschweizer Kantonen interviewt.

5 Ergebnisse aus den Interviews (subjektive Theorien)

Das Kategoriensystem (vgl. Anhang 2) teilt die Aussagen der interviewten Lehrpersonen in sechs Kategorien. Namentlich sind dies:

» Aspekte des Argumentationsunterrichts

» Faktoren, welche das mathematische Argumentieren fördern oder hemmen

» Einsatz verschiedener Darstellungsformen im Argumentationsunterricht

» Verwendung von Darstellungsmittel im Zusammenhang mit diesen Darstellungsformen

» Argumentationsschritte

» Merkmale des Argumentes

Die sechs Kategorien umfassen jeweils diverse Unterkategorien (vgl. Kategoriensystem; Anhang 2).

Die folgenden Abschnitte sollen einen Einblick in die Ergebnisse (vgl. auch Anhang 3) aus den Interviews (vgl. Anhang 1) gewähren. Ähnliche Aussagen sind zusammengefasst und paraphrasiert.

5.1 Bandbreite der Ergebnisse

Die interviewten Lehrpersonen beschreiben den Unterricht zum mathematischen Argumentieren als methodisch vielfältiger und offener, aber auch lauter. Die Schülerinnen und Schüler würden im Argumentationsunterricht stark sprachlich agieren, insbesondere der produktive Sprachgebrauch sei höher als in anderen Fächern und im übrigen Mathematikunterricht. Die Schülerinnen und Schüler würden behaupten und entgegnen, Argumentationsstränge gemeinsam weiterentwickeln und miteinander verhandeln. Auch würden sie sich gegenseitig helfen, was in heterogenen Paar- und Gruppenbildungen besonders gut gelinge. Durch den Einsatz verschiedener Sozialformen schaffen die Lehrpersonen die Grundlage für den Austausch unter den Schülerinnen und Schüler. «Think – Pair – Share» («Denken – Austauschen – Vorstellen», «Ich – Du – Wir») wird eingesetzt, um eine Balance zu finden. Genannt werden unter anderem auch Placemat, Lerntempoduett und Gruppenpuzzles. Die Differenzierung geschieht vor allem durch den Austausch in homogenen Gruppen. Stärkere Schülerinnen und Schüler würden sich gegenseitig herausfordern. Die Gruppen müssten für jede Sozialform sorgfältig und überlegt gebildet werden.

Herausforderungen im Argumentationsunterricht

Die zuvor betonte Sprachlichkeit beim mathematischen Argumentieren wird von den Lehrpersonen auch als eine der grössten Herausforderungen gesehen. Für den produktiven Sprachgebrauch müssten die Schülerinnen und Schüler über grundlegende überfachliche Kompetenzen verfügen. Beim rezeptiven wiederum seien die Lesekompetenzen bzw. insbesondere das Lese- und Hörverständnis innerhalb der mathematischen Fachsprache gefragt. Weitere Herausforderungen seien der Zeitfaktor

und die Rolle der Lehrperson. Dass in derselben Zeit weniger Aufgaben bewältigt werden können, scheint die Lehrpersonen zu beschäftigen. Es bleibe insbesondere zu wenig Zeit für Fehlversuche und die Lösung grundlegender Rechenprobleme. Für die Lehrpersonen findet zudem ein Rollenwechsel statt. Es fällt manchen offenbar schwer, den Schülerinnen und Schülern die notwendige Freiheit zu lassen und ihnen so die Chance des Scheiterns zu ermöglichen. Zugleich falle es auch den Schülerinnen und Schülern schwer, zunehmend vom «Schüelerle» wegzukommen und selbständiger («allein») zu arbeiten. Die Schülerinnen und Schüler wurden zu Beginn des Prozesses offenbar stark von der Lehrperson geleitet, erst im Verlaufe der Zeit stellte sich ein proaktiveres und selbständigeres Lernen ein. Die Lehrperson gebe aber auch später noch Anregungen, Gedankenanstösse, Inputs und Tipps und stelle gezielte Fragen. Ohne diese Interventionen würde der Argumentationsprozess (viel) zu lange dauern. Es sei wichtig, den Schülerinnen und Schüler aufzuzeigen, dass verschiedene Lösungswege zulässig sind.

Auch die Niveaudifferenzen unter den Schülerinnen und Schüler werden von den Lehrpersonen als Herausforderung erlebt. Das Spektrum reiche von Verständnis-, Rechen- und Sprachproblemen über Tempounterschiede bis hin zum selbständigen Lösen der Aufgaben.

Hilfestellungen

Das mathematische Argumentieren setze Vorwissen im Sinne von Sach- und mathematischem Wissen (Grundvorstellungen, Begriffe der Fachsprache) sowie ein allgemeines (deutsches) Sprachverständnis voraus. Der Austausch untereinander und der Einsatz verschiedener Darstellungsmittel würden das Argumentieren der Schülerinnen und Schüler fördern. Unterstützt werden sie dabei von verschiedenen methodischen Umsetzungen, darunter der Rubric (Kriterienraster)[3] und Merkzettel mit den wichtigsten Argumentationsschritten (vgl. unten). Die Aufgaben müssen mathematisch bearbeitbar und dem Niveau angepasst sein und unterschiedliche Lösungen zulassen. Dadurch würde wiederum der Austausch zwischen den Schülerinnen und Schülern gefördert.

Herausforderungen des (mathematischen) Argumentierens

Für die Schülerinnen und Schüler scheinen die sprachlichen Kompetenzen - und dabei insbesondere das Sprachverständnis – eine der grössten Herausforderungen beim Argumentieren. Darüber hinaus fehle oft die Motivation zum sauberen Argumentieren, mitunter, weil viele Schülerinnen und Schüler den Sinn des Argumentierens nicht sehen würden. Mathematische, überfachliche und metakognitive

[3] Der Einsatz des Rubric wurde im FEMAR-Projekt von der Interventionsgruppe explizit erfordert. Mir ist die Zugehörigkeit zur Interventions- oder Kontrollgruppe nicht bekannt. Deshalb kann ich nicht festmachen, ob auch Lehrpersonen aus der Kontrollgruppe den Einsatz eines ähnlichen Werkzeuges erwähnen. Ich vermute jedoch, dass dem nicht so war.

Schwierigkeiten kommen hinzu. Die offene Unterrichtsform erfordere viel Selbständigkeit, was sich die Schülerinnen und Schüler nicht gewohnt seien. Sie ist also nicht nur für die Lehrpersonen herausfordernd und neu. Es falle den Schülerinnen und Schülern zudem schwer, für sie Selbstverständliches in Worte zu fassen und zu begründen. Stärkere Schülerinnen und Schüler seien hier besonders gefordert, weil sie das Operationsverständnis bereits weitgehend verinnerlicht haben. Schwächere Schülerinnen und Schüler sind demnach zumindest in diesem Punkt im Vorteil, weil sie sich ohnehin mehr Gedanken zu ihrem (operativen) Vorgehen machen (müssen). Gerade diese Schülerinnen und Schüler seien jedoch auf Bestätigung (beispielsweise durch die Verifikation ihres Resultates) angewiesen und würden durch die Aufforderung zum Argumentieren unnötig verunsichert.

Darstellungsformen, -mittel und -wechsel

Die Darstellungsform sei der Knotenpunkt, an welchem die Gedanken zu Papier gebracht werden oder mündlich sprachlichen Ausdruck finden. Insbesondere die sprachliche Ebene wurde wiederum hervorgehoben, sie lasse sich auch gut durch ikonische Darstellungsmittel unterstützen. Es sei hingegen schwierig, die enaktive Ebene einzubeziehen; die Schülerinnen und Schüler würden sich schwertun bei der handelnden Argumentation am Material. Insgesamt würden die Darstellungsmittel im Argumentationsunterricht häufiger gewechselt als sonst. Ein komplett leeres Blatt Papier fördere das Argumentieren (und die Darstellungswechsel) insgesamt, da nichts die Gedanken stoppt oder ablenkt. Die Schülerinnen und Schüler bräuchten genügend Raum, um mutig auszuprobieren. Ziel des Übens sei schliesslich der Wechsel von der mündlichen hin zur schriftlichen Sprache (Vorstellung, Verbalisierung, Niederschrift).

Wozu mathematisch argumentieren?

Für die Sinnhaftigkeit des Argumentationsunterrichtes sind die Aussagen zukunftsorientiert. So würden die Schülerinnen und Schüler sich auf das Berufsleben vorbereiten oder Kompetenzen erwerben, um später komplexere Aufgaben bewältigen zu können. Die Lehrpersonen berichten, dass viele Schülerinnen und Schüler den Sinn des Argumentierens zunächst nicht erkennen, da ihnen das simple Lösen von Aufgaben effizienter erscheine. Das Argumentieren sei aber eben gerade nicht das Lösen nach Schema, sondern vielmehr das Reden über den Lösungsprozess und die ihm zugrunde liegenden Überlegungen. Es sei mitunter Ziel des Argumentationsunterrichtes, dass die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass sie (beispielsweise bei einer Prüfung) mit der (teil-)richtigen Begründung auch für ein vermeintlich «falsches» Resultat noch Punkte erhalten können. Auch würde das Argumentieren das bewusste Nachdenken über den Lösungsweg herausfordern.

Argumentationsschritte

Zu möglichen Argumentationsschritten werden Aussagen zu Metakognition, Verstehen, Erkennen, Beschreiben, Hinterfragen, Vorgehen, Begründen und Generalisieren gemacht. Metakognitive Schritte beinhalten unter anderem die Vorüberlegungen zum Argumentieren, also Überlegungen zum

Ablauf des Prozesses. Der Schritt des Verstehens bilde die Grundlage der Erkenntnis, da die Schülerinnen und Schüler überhaupt erst die Aufgabe sprachlich und kognitiv erfassen müssen. Es sei wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler das System hinter einer Aufgabe erkennen und diese Entdeckungen beschreiben können. Beim Schritt des Hinterfragens denken die Schülerinnen und Schüler darüber nach, ob ihr Lösungsweg stimmen kann. Dabei spiele bei stärkeren Schülerinnen und Schüler auch die Lehrperson eine Rolle, Schwächere sollen durch Nachfragen nicht zusätzlich verunsichert werden. Das Vorgehen werde im Vorfeld der Begründung reflektiert, dieser Schritt scheint also mit dem Hinterfragen einherzugehen. Die Lehrpersonen unterscheiden hierbei zwischen «Hinterfragen des Resultates» (codiert als Hinterfragen) und «metakognitivem Hinterfragen» (codiert als Vorgehen). Aufgrund der vorgehenden Schritte werde unter Einbezug verschiedener Darstellungsmittel begründet (es werden insbesondere Skizzen und die Fachsprache genannt). Die Generalisierung wird von den Lehrpersonen nicht stark gewichtet, sie trete aber durch sprachliche Begründung auf.

Kriterien mathematischer Argumente

Insgesamt nennen die Lehrpersonen Aspekte der Individualität, Nachvollziehbarkeit, Präzision und Stichhaltigkeit. Sie betonten, dass es beim Argumentieren kein richtig und falsch gebe. Vielmehr seien die Lösungen der Schülerinnen und Schüler sehr individuell und die Kunst liege darin, die persönliche Gedankenwelt nachvollziehbar und präzise zu erläutern. Dazu gehören auch Zwischenüberlegungen, die transparent dargestellt und möglichst exakt beim Namen genannt werden. Die Schülerinnen und Schüler müssen zunächst selbst verstehen, um dieses Verständnis anschliessend nachvollziehbar aufzuzeigen. Ein wichtiger Aspekt der Nachvollziehbarkeit scheint für die Lehrpersonen im Einsatz der Fachsprache und einer übersichtlichen Darstellung zu liegen. Es müsse eine Balance zwischen «mehr als nur das Resultat» versus «ausschweifende Formulierungen» gefunden werden. Diese Präzision erweise sich als Herausforderung, weil die Schülerinnen und Schüler dafür Relevantes von Irrelevantem unterscheiden können müssen. Gerade schwächere Schülerinnen und Schüler würden nämlich oftmals Quantität als Qualität interpretieren oder zumindest nach dieser Maxime agieren. Damit ein Argument schliesslich stichhaltig sei, müssten die Schülerinnen und Schüler ein korrektes Resultat vorweisen und die Erkenntnis des dahinter liegenden Systems aufzeigen können. Dazu würden auch Argumente gewertet, welche nicht aus der Mathematik selbst stammen.

5.2 Widersprüche

Während einige Lehrpersonen bezeichnen, die für den Argumentationsunterricht investierte Unterrichtszeit lohne sich, klagen andere über mangelnde Wochenlektionen. Das mathematische Argumentieren nehme zu viel Zeit in Anspruch. Um den anderen Stoff nicht zu vernachlässigen, würden sie das mathematische Argumentieren ausserhalb des FEMAR-Projektes nur punktuell pflegen.

Diskrepanzen ergeben sich auch hinsichtlich des Kriterienbezugs. Das mathematische Argumentieren sei einerseits stärker kriterienbezogen als der Unterricht in anderen Fächern[4]. Zugleich gebe es beim mathematischen Argumentieren kein richtig und falsch, was eine Lösung von Kriterien hin zur Individualität suggeriert.

Über die Rolle der Lehrperson scheinen sich die Befragten ebenfalls uneinig. Zwar besteht die konsentierte Ansicht, die Schülerinnen und Schüler würden beim mathematischen Argumentieren selbständiger arbeiten – während einige Lehrpersonen daraus schliessen, dass die Schülerinnen und Schüler auch weniger als sonst auf unmittelbares Feedback der Lehrperson angewiesen seien, beschreiben andere gegenteilig, dass ihre Schülerinnen und Schüler öfter Rat suchen würden. Diese Lehrpersonen sehen eine Herausforderung in der schnellen Rückmeldung, also der Verifikation, Falsifikation und der daraus folgenden Hilfestellung (inklusive Nachfragen).

Die Aussage einer Lehrperson sticht ins Auge: Es gebe beim mathematischen Argumentieren mehr Niveaudifferenzen. Vermutlich meint sie damit, dass die Niveaudifferenzen (wohlbemerkt trotz reichhaltiger Aufgabenstellungen) stärker hervortreten als im Mathematikunterricht mit anderen Schwerpunkten. Diese Aussage steht so oder so im Kontrast zur Aussage einer anderen Lehrperson, welche betont, dass sich gerade im Argumentationsunterricht alle Schülerinnen und Schüler auf ihre Weise einbringen könnten und auch in der Diskussion mit der Klasse ihren Teil zum Ergebnis beitragen würden.

[4] Oftmals wird hierzu der Rubric angeführt. Die Lehrpersonen scheinen ihn als Lösungsschlüssel zu verwenden, es müssten alle Punkte (Kriterien) des Rubrics in der Argumentation erfüllt werden. Andere Lehrpersonen betonen die Individualität und Varietät der Lösungsansätze von Schülerinnen und Schüler. Ich vermute, dass es sich dabei vor allem um Lehrpersonen aus der Kontrollgruppe handelte.

6 Diskussion

Die subjektiven Theorien von 27 Lehrpersonen zum Thema mathematisches Argumentieren wurden im Rahmen der halbstrukturierten Interviews ermittelt und qualitativ ausgewertet. Die Inhaltsanalyse zeigt, dass die subjektiven Theorien der befragten Lehrpersonen breit gefächert sind. Die folgenden Abschnitte vergleichen nun die subjektiven (vgl. Kap. 5) mit den fachdidaktischen Theorien (vgl. Kap. 3). Es werden Parallelen und Widersprüche aufgezeigt, diskutiert und ergänzend kommentiert.

Sprachlichkeit und andere Darstellungsformen und -mittel

Die Lehrpersonen verweisen darauf, dass die Sprache im Argumentationsunterricht eine zentrale Rolle spielt: Einerseits müsse – als Voraussetzung für jede Argumentationstätigkeit – ein rezeptives Sprachverständnis (insbesondere der mathematischen Fachsprache) vorhanden sein. Andererseits bedürfe es produktiver sprachlicher Kompetenzen, die auch in fachsprachlicher Hinsicht genügend ausgereift sind. Diese (im Vergleich zum übrigen Mathematikunterricht) erhöhte Sprachlichkeit wird von den Lehrpersonen als Herausforderung wahrgenommen. Diese Einschätzung bezieht sich ebenso auf rezeptives wie auch auf produktives Sprachhandeln.

In der Sprachdidaktik werden rezeptive vor produktive Tätigkeiten gestellt bzw. mündliche vor schriftliche (vgl. Kap. 3.2.2). Im Argumentationsunterricht scheinen die Lehrpersonen diese schrittweise Annäherung an die produktive Schriftlichkeit nicht zu pflegen, vielleicht weil sie diese nicht erkennen oder nicht als bedeutsam einschätzen (vgl. Huneke & Steinig, 1997, S. 91). Gerade weil den Schülerinnen und Schülern die Sprachlichkeit schwerfällt, ist der Einsatz verschiedener Darstellungsmittel und der flexible Wechsel zwischen ebendiesen so wichtig (vgl. Kap. 3.3.1). Die Lehrpersonen scheinen im Unterricht zum mathematischen Argumentieren allerdings vor allem auf die sprachlichen Mittel und Kompetenzen zu setzen. Dabei wäre es insbesondere für den Aufbau des Operationsverständnisses wichtig, den Übersetzungsprozess zwischen allen Darstellungsebenen (enaktiv, ikonisch, sprachlich-symbolisch, mathematisch-symbolisch) anzuregen und einzufordern, weil durch die Übersetzungsprozesse das Operationsverständnis und die mentalen Vorstellungen aufgebaut und das Lernen abstrakter Inhalte nachvollziehbar und sichtbar wird (vgl. Schuler, 2019, S. 25; Leuders, 2019, S. 175; Kap. 3.3.1). Der bewusste und flexible Wechsel von Darstellungen dient den Schülerinnen und Schülern insofern längerfristig, als sie Einsichten gewinnen und verstehen, was sie lernen.

Die Lehrpersonen äusserten sich nicht nur hinsichtlich Sprache, sondern auch hinsichtlich ikonischer und symbolischer Darstellungen. Sie räumen ein, dass – insbesondere in Zusammenhang mit dem mathematischen Argumentieren – enaktive Darstellungen schwierig einzusetzen seien. Diese Überzeugung beruht vermutlich auf einem Missverständnis: In der vorliegenden Arbeit werden die Begriffe «Sach- und Argumentationsaufgaben» analog der Handhabung im FEMAR-Projekt mehrheitlich synonym verwendet. Diese Vereinheitlichung lässt sich mit dem FEMAR-Setting begründen,

welches vorwiegend Sachaufgaben als Argumentationsaufgaben einsetzte. Weil auch die befragten Lehrpersonen die beiden Typen von Aufgaben nicht unterscheiden, gehen sie von sprachlichen Aufgabenstellungen und -bearbeitungen aus (im Sinn sprachlich dargestellter Sachaufgaben). In Anbetracht der Aussagen in Kapitel 3.3.1 wäre es wichtig, alle Repräsentationsformen und Darstellungswechsel einzusetzen.

Wozu mathematisch argumentieren?

Einige der befragten Lehrpersonen sehen den Sinn des mathematischen Argumentierens im bewussten Nachdenken über den Lösungsweg, wie dieser auch von Schuler und Leuders (vgl. Kap. 3.3.1) benannt wird. Insgesamt scheint der Fokus der Lehrpersonen jedoch eher auf der Vorbereitung für die berufliche Zukunft der Schülerinnen und Schüler zu liegen, wobei einige Lehrpersonen offenbar keinen weitergehenden Sinn im Argumentieren erkennen als den Erwerb einer Argumentationskompetenz. Das würde bedeuten, dass das mathematische Argumentieren im Primarschulunterricht schon nahezu als eigener Inhalt gerechnet würde und dementsprechend keine übergeordneten Ziele verfolgte. In diesem Fall rücken nebensächliche Aspekte wie der Zeitfaktor ins Zentrum, was Einbussen der Qualität (Individualität, Nachvollziehbarkeit, Präzision, Stichhaltigkeit) der Argumente zur Folge haben kann. Darum ist es wichtig, dass Lehrpersonen den Sinn des Argumentierens weiter fassen.

Es erscheint als unbestritten wichtig, dass auch die Schülerinnen und Schüler einen Sinn in der Argumentationstätigkeit erkennen. Einige Lehrpersonen berichteten, dass ihre Schülerinnen und Schüler besonders zu Beginn des Projektes nur schwer zu motivieren waren. In den Köpfen der Schülerinnen und Schüler hätten festgefahrene Schemata zum effizienten Aufgaben-Abarbeiten dominiert und die Bereitschaft für eine etwas andere Lernkultur hätte reichlich Überzeugungsarbeit gekostet. Die Schülerinnen und Schüler brauchen vor allem Zeit und gute Anleitungen zum Argumentieren – dies neben dem Bedürfnis nach inhaltlichen, sprachlichen, überfachlichen und metakognitiven Unterstützungen.

Herausforderungen und Lösungsvorschläge

In der Analyse der Interviews wurde deutlich, dass viele Lehrpersonen den Unterricht zum mathematischen Argumentieren als zeitintensiv und herausfordernd erleben. Die straffe Jahresplanung lasse nicht genügend Platz zum ausführlichen Argumentationsunterricht und für die damit einhergehenden Diskussionen. An dieser Stelle kommt die Frage nach Quantität versus Qualität ins Spiel (vgl. Kap. 6.1). Viele Lehrpersonen sind es sich offenbar gewohnt, in ihrem Unterricht sicherzustellen, dass die Lernenden Aufgaben effizient abarbeiten. Interessant ist, dass einige Lehrpersonen den Unterricht zum mathematischen Argumentieren mit kommunikativen Lernprinzipien (im Sinne von

Dialogischem Lernen, Lernen im Dialog, Lernen im Gespräch, sprachbasiertem Lernen etc.) vergleichen und Parallelen erkennen. Für diese Lehrpersonen scheint denn auch der Zeitfaktor keine Hürde zu sein, da sie den Mehrwert des Zeitaufwandes zum Reflektieren und Argumentieren erkennen.

Reichhaltige Aufgaben katalysieren die natürliche Differenzierung, was Niveaudifferenzen stärker hervorbringt. Grundsätzliche Probleme, die das Verständnis, mathematischer Kompetenzen und die (Fach-) Sprache betreffen, sind selbstverständlich nicht einfach von der Hand zu weisen. Aus diesem Grund ist die Betreuung und Begleitung durch die Lehrperson auch im vermeintlich selbstständigeren Argumentationsunterricht unverzichtbar. Während Niveaudifferenzen im übrigen Mathematikunterricht vielleicht weniger auffallen, machen sie sich im Argumentationsunterricht erst recht bemerkbar. Mitunter deshalb werden sie wohl von den Lehrpersonen vermehrt wahrgenommen und als Herausforderung gesehen. Aus demselben Grund ist es beim mathematischen Argumentieren – geprägt von unterschiedlichen Lösungswegen und individuellen Herangehensweisen im Kontext reichhaltiger Aufgaben – wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler genügend Bearbeitungszeit erhalten.

Auch in mathematikdidaktischer Hinsicht ist es sinnvoller, die Schülerinnen und Schüler für längere Zeit an einer reichhaltigen Aufgabe arbeiten zu lassen, als in möglichst kurzer Zeit möglichst viele Aufgaben *ab*arbeiten zu lassen. Die offenere Lernform ist sicherlich für die Lehrperson intensiver, weil alle Schülerinnen und Schüler zeitgleich bei unterschiedlichen Fragen anstehen oder ihre persönlichen Erkenntnisse mitteilen möchten. Ein Grossteil der Lehrpersonen ist es sich augenscheinlich nicht gewohnt, die Schülerinnen und Schüler so selbständig arbeiten und austauschen zu lassen, wie das der Argumentationsunterricht im Rahmen des FEMAR-Projektes vorsah. Die Lehrpersonen berichten von Problemen beim Finden der richtigen Balance für die Lernbegleitung. Oft wurde während der Interviews das Adjektiv «allein» für Selbständigkeit verwendet. Es ist wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler eben nicht allein sind, sondern die notwendige Unterstützung erfahren, durch die Lehrperson oder Peers. Die Schülerinnen und Schüler müssen den Argumentationsprozess selbständig bestreiten, um erfolgreich ihre individuellen Erkenntnisse aufzeigen zu können. Die Lehrperson begleiten sie aber – sie geben notwendige Inputs – und halten sich ansonsten eher zurück.

Argumentationsschritte

Die in Kapitel 3.2.1 eingeführten Argumentationsschritte (Erkennen/Entdecken, Beschreiben, Hinterfragen, Begründen/Erklären, Generalisieren) werden auch von den interviewten Lehrpersonen genannt. Interessant ist, dass die Lehrpersonen drei weitere Schritte ergänzen: Metakognition, Verstehen und Vorgehen. Die Ein- und Abgrenzung dieser drei Schritte ist bereits in der Deskription (vgl. Kap. 5) dargelegt. Aufgrund der Aussagen der Lehrpersonen scheint es sinnvoll, die ursprünglichen fünf Argumentationsschritte zu erweitern (vgl. Kap. 3.2.1), denn mindestens zwei der drei zusätzlichen Schritte sind offenbar für den Erfolg der Schülerinnen und Schüler zentral – so könnte ohne metakognitive Vorüberlegungen und das Verstehen der Aufgabe gar nicht argumentiert werden. Der

Schritt des Vorgehens lässt sich allenfalls in jenen der Metakognition oder des Hinterfragens integrieren (vgl. Kap. 5.1).

Die Aussagen der Interviewten zu den Merkmalen eines Argumentes (Individualität, Nachvollziehbarkeit, Präzision, Stichhaltigkeit) decken sich mehrheitlich mit der objektiven Theorie. Explizit wird oftmals der Kriterienbezug des Argumentationsprozesses betont. Dies könnte darauf zurückzuführen sein, dass die Interventionsgruppe mit dem Rubric, also einem Kriterienraster arbeitete.

6.1 Quantität versus Qualität

Verschiedene Lehrpersonen schneiden die Frage nach Quantität versus Qualität an. Unter Quantität verstehen sie die bearbeitete Anzahl Aufgaben innerhalb eines Zeitfensters oder gelegentlich auch den Umfang einer Antwort (Textmenge). Bei der Frage nach der Qualität eines Argumentes geht es darum, was eigentlich zu einem Argument gehört und was nicht. Qualität bestrebt zudem die Erfüllung verschiedener Kriterien, wozu insbesondere auch die Präzision zählt (weitere mögliche Kriterien wurden in den Kapiteln 3 und 5 begründet). Quantität ist also nicht gleich Qualität.

Eine weiterführende Frage, welche die Lehrpersonen hierzu in verschiedenen Varianten aufwerfen, ist jene nach Beurteilungsmöglichkeit im Kontext von Quantität und Qualität. Ein Ausschnitt aus dem Interview 10 veranschaulicht die Problematik: « […] das ist ein bisschen die Schwierigkeit mit dieser Prüfung und diesem Zeitfenster. Eigentlich sollte man sagen können, ihr habt solange Zeit, bis ihr das Gefühl habt, jetzt seid ihr soweit, dass ihr nicht mehr mehr schreiben könntet.» (vgl. Anhang 1; Interview 10).

Dieses Interview war insbesondere speziell, als eine Lehrperson und eine Heilpädagogin gemeinsam befragt wurden. Es entstand ein Dialog zwischen den beiden z.B. über mögliche Prüfungsformen. Daraus kristallisierte sich das Dilemma zum Verhältnis zwischen Quantität und Qualität: Wenn Schülerinnen und Schüler den eingeführten und am Rubric ablesbaren Argumentationsschritten folgen, dann lösen sie weniger Aufgaben, als wenn sie lediglich das Resultat hinschreiben. Im Gespräch überlegen sich die Lehrperson und die Heilpädagogin aus Interview 10 verschiedene Lösungsansätze für ihr Dilemma. Es könnten beispielsweise nur sehr wenige Aufgaben gestellt werden, damit die Prüfungszeit für die Bearbeitung aller Aufgaben reicht. Diese Option birgt allerdingst das Risiko, dass einem Kind die gestellten Aufgaben (-typen) überhaupt nicht liegen und es deshalb nicht die bestmögliche Leistung erbringen kann.

Ein weiterer Ansatz bestünde darin, dass die Schülerinnen und Schüler sich Aufgaben aus einem Prüfungskatalog aussuchen und diese lösen. Diese Möglichkeit hat aber auch ihre Tücken, denn hier spielt die Frage nach der Gewichtung von Quantität und Qualität eine tragende Rolle. Ist eine gehaltvoll argumentierte Aufgabe (nach den Kriterien in Kap. 5.1 und 5.2) schlechter zu bewerten als mehrere oberflächlich abgearbeitete? Fragen nach Kriterien, Beurteilungs- und Bewertungsmassstäben bleiben offen.

Es wäre möglich und sinnvoll, Beurteilungsanlässe mündlich durchzuführen (zumindest einen Teil davon). So ist begründet zu vermuten, dass es einigen Schülerinnen und Schülern leichter fällt, sich mündlich auszudrücken (vgl. Kap. 3.2.2). Das längerfristige Ziel besteht jedoch in Kompetenzen zur rezeptiven und produktiven Schriftlichkeit, weshalb auch die beiden Befragten dahingehend tendieren, nur einen Teil der Prüfung mündlich durchzuführen.

In Anbetracht der angestellten Überlegungen scheint eine Mischung der Prüfungsform unerlässlich. Es wäre zum Beispiel eine Möglichkeit, einen schriftlichen Pflicht- und einen Wahlpflicht- sowie einen mündlichen Prüfungsteil zu bestimmen. Unabhängig der Prüfungs- bzw. Beurteilungsanlage erscheint es wichtig, dass die Schülerinnen und Schülern beim Argumentieren möglichst wenig Zeitdruck empfinden. Ein solcher Beurteilungsanlass enthält wenige zentrale Aufgaben und bietet genügend Zeit zum Lösen bzw. Argumentieren.

Da die Beurteilung des mathematischen Argumentierens nicht zu den Fragestellungen dieser Arbeit gehört, wird im Folgenden nicht weiter darauf eingegangen. Die abschliessende Beantwortung verschiedener Fragestellungen rund um die Beurteilung von Quantität und Qualität beim mathematischen Argumentieren bedürfte einer breiteren Vermittlung durch fachdidaktische Theorien.

6.2 Schlussfolgerungen und didaktische Konsequenzen

Die ersten beiden Forschungsfragen nach den subjektiven Theorien und dem Vergleich zu fachdidaktischen Theorien wurden in der bisherigen Diskussion geklärt. Die folgenden Abschnitte richten sich an die dritte Frage: «Was bedeuten die Erkenntnisse zu den ersten beiden Fragen für die Unterrichtspraxis und darüber hinaus für die Aus- und Weiterbildung?»

Konsequenzen für den Unterricht

Für den Argumentationsunterricht lässt sich gestützt auf die Erkenntnisse aus der qualitativen Analyse sagen, dass er im Vergleich zum übrigen Mathematikunterricht sehr sprachlastig ist. Die Schülerinnen und Schüler müssen einerseits elaborierte rezeptive Sprach- bzw. Fachsprachkompetenzen zeigen (Lese- und Hörverständnis). Andererseits brauchen sie produktive Kompetenzen, um sich auszudrücken und Darstellungswechsel zu vollziehen (vgl. Kap. 3.2.2). Diese Darstellungswechsel werden zumeist durch Sprache begleitet, weshalb die Sprache auf allen Ebenen anzutreffen ist.

Als Lehrperson scheint es zudem wichtig, die Schülerinnen und Schüler selbständig arbeiten zu lassen und trotzdem im Sinne einer qualifizierten Begleitung für Fragen und Anliegen verfügbar zu sein. Insbesondere für Lehrpersonen mit wenig Unterrichtserfahrung braucht es bis zur Umsetzung einer solchen Lehr- und Lernkultur ein zunehmend wachsendes Vertrauen – in die Schülerinnen und Schüler, aber auch in die eigenen Fähigkeiten. Trotz allfälliger Unsicherheiten ist es wichtig, dass die Lehrperson mutig voranschreitet und gemeinsam mit ihren Schülerinnen und Schülern dazulernt.

Aufgrund der Ergebnisse ist auch zu erwarten, dass die Bearbeitung einer Argumentationsaufgabe mehr Zeit in Anspruch nimmt als die Lösung einer herkömmlichen Operation. Folglich werden in derselben Unterrichtszeit weniger Aufgaben bearbeitet. Aus den Interviewdaten lässt sich interpretieren, dass die Lehrpersonen infolge der Bearbeitung zeitaufwändiger produktiver Aufgaben gewisse Einbussen in der Wirkung des Lernens befürchten. Es wäre wichtig, die Lehrpersonen mit dem Prinzip «Qualität vor Quantität» zu konfrontieren, in der Hoffnung, dass daraus eine neue Zuversicht hervorgeht.

Spannend ist die abschliessende Überlegung, ob die Tätigkeit des mathematischen Argumentierens im Primarschulunterricht isoliert betrachtet werden sollte. Dies ist zu verneinen, weil das mathematische Argumentieren alle Kompetenzbereiche (bzw. Inhalte; vgl. LP21, 2020) des Mathematikunterrichts tangieren kann und demzufolge weniger einer isolierten Betrachtung als einer spezifischen Sicht auf das Ganze entspricht (vgl. Kap. 3.3).

Konsequenzen für die Aus- und Weiterbildung

Es ist zentral, dass angehende Lehrpersonen nicht nur mit den Kompetenzbereichen des Fachbereichslehrplans vertraut werden, sondern ebenso mit den Handlungsaspekten. Das mathematische Argumentieren gilt als ein wichtiger Vertreter Letzterer. In der Ausbildung sollten also dargelegte Aspekte des mathematischen Argumentierens gebührend zur Geltung kommen.

Die vorliegenden Ergebnisse zeigen, dass das mathematische Argumentieren ein vielfältiges und weitläufiges Thema ist. Lehrpersonen sollten deshalb in ihrer beruflichen Laufbahn ständig dazulernen bzw. ihre subjektiven Theorien sukzessive erweitern. Dementsprechend liegt es auf der Hand, dass das Thema auch in der Weiterbildung prominent vertreten ist, unter verschiedenen Aspekten und zu unterschiedlichen Kompetenzbereichen.

6.3 Kritik

Die einbezogene Literatur bespricht die wesentlichen fachdidaktischen Theorien zum mathematischen Argumentieren. Weiterführende Studien könnten beispielsweise die Beurteilung der Kompetenzen zum Argumentieren oder das sprachbasierte Lernen untersuchen.

Da die Interviewdaten aus einer Interventionsstudie mit einem vorgegebenen Treatment stammen, sind einige Aussagen mehr oder weniger stark auf dieses bezogen. Beispielsweise erwähnten Personen aus der Interventionsgruppe oftmals den Rubric und alle Lehrpersonen hatten zum Zeitpunkt des Interviews mehrere Wochen mit vorgefertigten Unterrichtseinheiten aus dem Projekt unterrichtet. Um die Auswirkungen der Intervention auf die subjektiven Theorien der Lehrpersonen zu untersuchen, könnten die Interviews aus der Interventions- bzw. Kontrollgruppe in einer nachträglichen Analyse getrennt ausgewertet werden. Darüber hinaus wäre es denkbar, die Wirkungen des gesamten FEMAR-Projektes mit einer vom Projekt unabhängigen Kontrollgruppe zu vergleichen.

Da es sich bei den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit ausschliesslich um Aussagen von Lehrpersonen (und einer Heilpädagogin) handelt, könnte auch ein Abgleich mit den subjektiven Theorien der Schülerinnen und Schüler in Betracht gezogen werden. Ein solcher würde Aufschluss darüber geben, ob oder inwiefern die subjektiven Theorien einen Impact auf den Primarschulunterricht haben.

6.4 Fazit

Die Erkenntnisse aus der empirischen Studie sind nicht nur für bereits praktizierende Lehrpersonen aufschlussreich, sondern auch für angehende. Sie zeigen auf, dass das Thema mit wachsender Unterrichtserfahrung differenzierter und elaborierter wird, aber nie und nimmer abgeschlossen ist. Dies ist auch dadurch erkennbar, dass die in Kapitel 5 geäusserten subjektiven Theorien zwar die meisten fachdidaktischen Erkenntnisse anschneiden, aber weder alle fachdidaktischen Theorien abdecken noch in einer befriedigenden Vollständigkeit und Plausibilität.

Gleichzeitig regen die subjektiven Theorien die Wissenschaft an, ihre Empirie und Theorie stetig weiterzuentwickeln. Aussagen der befragten Lehrpersonen ergänzten denn auch im vorliegenden Rahmen die fachdidaktischen Theorien, so beispielsweise um drei zusätzliche Argumentationsschritte (vgl. Kap. 3.2.1 und Kap. 5.1).

Bekanntlich lernt der Mensch aus eigenen und fremden Fehlern. Im Falle dieser Arbeit stellt wohl die Durchleuchtung der von den befragten Lehrpersonen geschilderten Herausforderungen des mathematischen Argumentierens eine solche Möglichkeit dar. Die erhöhte Sprachlichkeit im Argumentationsunterricht könnte beispielsweise als Ungerechtigkeit empfunden werden, weil sprachlich schwache Schülerinnen und Schüler gegenüber sprachlich starken benachteiligt sind. Dieser Chancennachteil kann und *soll* durch den Einsatz variierender Darstellungsformen und -mittel entgegengewirkt werden – insbesondere bei der Aufgabenstellung.

Die Befunde dieser Arbeit haben insgesamt deutlich gemacht, dass das mathematische Argumentieren nicht als eigenständige Kompetenz, sondern vielmehr als ein Zusammenzug verschiedener Kompetenzen betrachtet werden sollte. So vereint der Argumentationsunterricht verschiedene Handlungsaspekte und Kompetenzbereiche des Lehrplan 21, was für den Unterricht des mathematischen Argumentierens in der Primarschule spricht. (Angehende) Lehrpersonen sollten sich wiederkehrend mit dem mathematischen Argumentieren befassen, damit sie ihre Schülerinnen und Schüler zunehmend qualifizierter unterstützen können.

–

Literatur

Bezold, A. (2010). *Mathematisches Argumentieren in der Grundschule fördern. Handreichungen des Programms SINUS an Grundschulen.* Kiel: IPN.

Bezold, A. (2012). Argumentationskompetenzen im Unterrichtsalltag fördern, analysieren und bewerten. In: A. S. Steinweg (Hrsg.), *Prozessbezogene Kompetenzen: Fördern, Beobachten, Bewerten* (S. 9-22). Bamberg: University of Bamberg Press.

Bruner, J. S. (1971). Über kognitive Entwicklung. In J. S. Bruner, R.R. Olver & P.M. Greenfeld (Hrsg.), *Studien zur kognitiven Entwicklung. Eine kooperative Untersuchung am «Center for Cognitive Studies» der Harvard-Universität* (S. 21-53). Stuttgart: Klett.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Berlin: Springer-Verlag.

Brunner, E. (2016). Bin ich ein Teil von dir? Kindergartenkinder lernen mathematisch argumentieren. *4 bis 8, 2016* (8), 37-39.

Brunner, E. (2018). Mathematisches Argumentieren im Kindergarten fördern. Eine Handreichung. *Materialien zur Bildungsforschung, Nr. 10/2018.*

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Fetzer, M. (2011). Wie argumentieren Grundschulkinder im Mathematikunterricht? Eine argumentationstheoretische Perspektive. *Journal für Mathematik-Didaktik,* 32, S. 27-51.

Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule.* Heidelberg: Spektrum.

Gerster, H.-D. & Schultz, R. (2000). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen.* Freiburg: Pädagogische Hochschule Freiburg.

Groeben, N. (1988). Explikation des Konstrukts «Subjektive Theorie». In N. Groeben, D. Wahl, J. Schlee & B. Scheele (Hrsg.), *Das Forschungsprogramm Subjektive Theorien: eine Einführung in die Psychologie des reflexiven Subjekts.* Tübingen: Francke.

Hefendehl-Hebeker, L. & Hussmann, S. (2003). Beweisen – Argumentieren. In T. Leuders (Hrsg.), *Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (S. 93-106). Berlin: Cornelsen.

Hess, K. (2003). *Lehren – zwischen Belehrung und Lernbegleitung. Einstellungen, Umsetzungen und Wirkungen im mathematischen Anfangsunterricht.* Bern: hep-Verlag.

Hess, K. (2012). *Kinder brauchen Strategien. Eine frühe Sicht auf mathematisches Verstehen.* Seelze: Klett & Kallmeyer.

Hess, K. (2016). *Kinder brauchen Strategien. Eine frühe Sicht auf mathematisches Verstehen (2. Aufl.).* Seelze: Klett & Kallmeyer.

Hess, K. (2021; im Druck). Beurteilungsanlässe zum Plusrechnen im ersten Zyklus. In M. Naas, H. Lötscher & M. Roos (Hrsg.), *Kompetenzorientiert beurteilen*. Bern: hep-Verlag.

Hess, K. & Streit, Ch. (2015). Anliegen und Absichten eines Lehrmittels für die Schuleingangsstufe. In Ch. Müller, L. Amberg, T. Dütsch, E. Hildebrandt, F. Vogt, E. Wannack (Hrsg.), *Perspektiven und Potentiale in der Schuleingangsstufe* (S. 113-125). Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.

Hess, K. & Wälti, B. (2009). Leistungsbewertung: Mathematik förderorientiert beurteilen. In G. Cwik (Hrsg.), *Selbstständiges Lernen unterstützen: Konzepte und Methoden, Unterrichtsbeispiele für die Jahrgänge 1 bis 4* (S. 41-74). Berlin: Cornelsen Skriptor.

Hess, K., Blum, V. & Smit, R. (2020). Argumentieren lernen mit Rubrics. Raster zur Steuerung und Beurteilung des mathematischen Argumentierens. *DiMawe – Die Materialwerkstatt, 2* (1), S. 49–62.

Heymann, H. W. (2010). Binnendifferenzierung – eine Utopie? Pädagogischer Anspruch, didaktisches Handwerk, Realisierungschancen. *PÄDAGOGIK, 62*, 11, S. 6-10.

Huneke, H.-W. & Steinig, W. (1997). *Deutsch als Fremdsprache. Eine Einführung.* Berlin: Erich Schmidt.

KMK (2005). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004.* München, Neuwied: Luchterhand.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2010). *Umgang mit Heterogenität. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule. Handreichungen des Programms SINUS-Transfer Grundschule. Staatsinstitut für Schulqualität.* Kiel: Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) an der Universität Kiel.

Krieg, M. & Hess, K. (2017). *Kompetenzorientierter Unterricht. Orientierung.* Zug: Direktion für Bildung und Kultur & Amt für gemeindliche Schulen (AgS).

Lehrplan 21. *Kanton Zug. Fachbereich Mathematik.* https://zg.lehrplan.ch/index.php?code=b|5|0&la=yes. Verifiziert am 22. Juni 2020.

Leuders, J. (2019). Diagnose und Leistungsbewertung. In J. Leuders & K. Philipp (Hrsg.), *Mathematik. Didaktik für die Grundschule (4. Aufl.).* Berlin: Cornelsen.

Leutwyler, B. & Roos, M. (2017). *Wissenschaftliches Arbeiten im Lehramtsstudium. Recherchieren, schreiben, forschen.* Bern: Hogrefe Verlag.

Maass, K. (2019). Sachrechnen und Modellieren. In J. Leuders & K. Philipp (Hrsg.), *Mathematik. Didaktik für die Grundschule (4. Aufl.).* Berlin: Cornelsen.

Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Meyer, M. (2007). Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Zur Rolle der Abduktion und des Arguments. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 28, S. 286-310.

Mittelstrass, J. (1995/96). *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie. Stichwort: Argumentation.* Stuttgart, Weimar.

Müller, G. N. & Wittmann, E. Ch. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe.* Braunschweig: Vieweg.

PH Zug. *Forschung. Projekte in der offenen Forschung. Einzelprojekte. FEMAR.* https://www.zg.ch/behoerden/direktion-fur-bildung-und-kultur/phzg/forschung/offene-forschung/projekte/femar. Verifiziert am 22. Juni 2020.

Portmann, P. R. (1993). Rezeptive und produktive Fertigkeiten. *Deutsch als Fremdsprache. Zeitschrift zur Theorie und Praxis des Faches Deutsch als Fremdsprache, 30 (1993)* 2, S. 96-99.

Royar, T. & Streit, Ch. (2010). *MATHElino. Kinder begleiten auf mathematischen Entdeckungsreisen.* Seelze: Klett & Kallmeyer.

Schuler, St. (2019). Zahlen und Operationen. In J. Leuders & K. Philipp (Hrsg.), *Mathematik. Didaktik für die Grundschule (4. Aufl.).* Berlin: Cornelsen.

Stangl, W. (2020). *Online Lexikon für Psychologie und Pädagogik. Stichwort: Konsenstheorie.* https://lexikon.stangl.eu/10315/konsenstheorie/. Verifiziert am 15. Dezember 2020.

Wahrig-Burfeind, Renate. (2011). *Brockhaus, Wahrig, Deutsches Wörterbuch. Stichwort: Argument.* wissenmedia in der inmediaONE] GmbH. DVD ROM (2012). Gütersloh/München.

Wahrig-Burfeind, Renate. (2011). *Brockhaus, Wahrig, Deutsches Wörterbuch. Stichwort: Argumentieren.* wissenmedia in der inmediaONE] GmbH. DVD ROM (2012). Gütersloh/München.

Winter, H. W. (1987). *Mathematik entdecken. Neue Ansätze zum Mathematikunterricht in der Grundschule.* Frankfurt a.M.: Scriptor.

Winter, H. W. (1989). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Winter, H. W. (2003). *Sachrechnen in der Grundschule.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Wollring, B. (2009). Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In A. Peter-Koop, G. Lilitakis & B. Spindeler (Hrsg.), *Lernumgebungen – ein Weg*

zum kompetenzorientierten Mathematikunterricht in der Grundschule (S. 9-23). Offenburg: Mildenberger Verlag.

Bildnachweise

Die Abbildungen wurden alle selbst erstellt. Einige bedienen sich aber inhaltlich der Ideen anderer. Diese Quellen sind angegeben.

Abbildung 1:

Bezold, A. (2010). *Mathematisches Argumentieren in der Grundschule fördern. Handreichungen des Programms SINUS an Grundschulen.* Kiel: IPN.

Abbildung 2:

Brunner, E. (2016). Bin ich ein Teil von dir? Kindergartenkinder lernen mathematisch argumentieren. *4 bis 8, 2016* (8), 37-39.

Abbildung 3:

Bezold, A. (2010). *Mathematisches Argumentieren in der Grundschule fördern. Handreichungen des Programms SINUS an Grundschulen.* Kiel: IPN.

Brunner, E. (2016). Bin ich ein Teil von dir? Kindergartenkinder lernen mathematisch argumentieren. *4 bis 8, 2016* (8), 37-39.

Abbildung 4:

Müller, G. N. & Wittmann, E. Ch. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe.* Braunschweig: Vieweg.

Hess, K. (2012). *Kinder brauchen Strategien. Eine frühe Sicht auf mathematisches Verstehen.* Seelze: Klett & Kallmeyer.

Alle Fotos (Abb. 5-8) sowie die Zeichnung auf dem Deckblatt stammen von der Autorin.

Anhang

Interview 1 44
Interview 2 46
Interview 3 47
Interview 4 50
Interview 5 52
Interview 6 55
Interview 7 58
Interview 8 59
Interview 9 62
Interview 10 65
Interview 11 71
Interview 12 75
Interview 13 76
Interview 14 77
Interview 15 78
Interview 16 79
Interview 17 80
Interview 18 83
Interview 19 85
Interview 20 87
Interview 21 91
Interview 22 94
Interview 23 95
Interview 24 96
Interview 25 97
Interview 26 98
Interview 27 100

Anhang 2: Kategoriensystem für die qualitative Datenanalyse der FEMAR-Interviews 102

Anhang 3: Hauptaussagen der interviewten Lehrpersonen 110

Anhang 1: Interviewtranskripte

Die Fragen zum Feedback sind nicht enthalten, da sie für die Resultate der Bachelorarbeit nicht relevant sind. Die Fragen und Aussagen der Interviewenden sind fett gedruckt. In Interview 10 wurden eine Lehrperson (LP) und eine schulische Heilpädagogin (SHP) gemeinsam befragt.

Interview 1

Was ist mathematisches Argumentieren? Was sind die Merkmale?

Hm. Also was ich jetzt aus diesem Forschungsprojekt ein wenig herausnehmen konnte oder auch mit dem Bearbeiten des Lehrplans, ist für mich mathematisches Argumentieren, dass die Schüler und Schülerinnen verstehen, um was es in der Aufgabe geht und daraus auch eine Begründung festsetzen können, warum sie sich das so überlegen und dass sie auch merken, was sind die Merkmale, dass mein Argument oder die Aufgabe, welche ich gelöst habe, auch stichhaltig ist und man sieht auch viel besser so ein wenig in die Tiefe, wie Kinder auch mit diesen Aufgaben umgehen, also was sie sich dabei überlegen. Ja. So ein wenig in die Tiefe sehen, was sie sich überlegen und dass dann das Resultat auch wirklich stimmen kann. Das habe ich so ein wenig herausgenommen bei diesem Schülerprojekt.

Mhm. Was machen die Schüler dann ganz konkret? Also wenn sie am mathematischen Argumentieren dran sind. Vielleicht hast du ein paar Beispiele.

Also sie müssen sich ja zuerst einmal mit dieser Aufgabe auseinandersetzen, also sie werden mit dieser Aufgabe konfrontiert und danach gibt es ja diese Schritte, wie gehe ich vor, was muss ich für Überlegungen machen, sie brauchen die Begrifflichkeiten, die klar sind, die mathematischen Begriffe wie Multiplizieren, Dividieren und so weiter und so fort und dass sie diese dann auch in dieser Argumentation anwenden können. Oder halt auch mit Farben visualisieren und dann darauf Bezug nehmen, indem sie mir das zum Beispiel erklären. Ja.

Was ist ganz typisch in deinem Unterricht, wenn mathematisches Argumentieren stattfindet?

Also typisch (lange Pause), also was mir jetzt aufgefallen ist, oder?

Ja. Wo vielleicht sonst bei anderen Lektionen nicht so extrem zum Vorschein kommt.

Also ich denke gerade in der Mathematik, beim mathematischen Argumentieren, arbeitet man viel miteinander, kommunikativ. Es ist ja nicht einfach etwas, was jeder für sich, also ja schon auch am Platz löst, aber du gehst nachher eigentlich wirklich in den Austausch und sprichst miteinander darüber und auch vergleichen. Aber für das brauchst du natürlich ein Instrument, auf was man achtet. Ja es ist mehr kommunikativ, als wenn ich jetzt an eine typische Mathelektion denke, welche ich schon gemacht habe, so ein Matheplan. Da muss ich wenig austauschen, vielleicht ab und zu einmal. Aber da ist jetzt wirklich, in diesem Projekt, ist mir aufgefallen, man redet immer wieder darüber,

man fasst noch einmal zusammen, man hält seine Gedanken fest, als Gruppe, sei es in einem Gruppenpuzzle oder Lerntempo-Duett, wo man ja auch in den Austausch kommt.

Du hast von einem Instrument erzählt, welches dir da hilft. Kannst du vielleicht zu dem noch etwas sagen? Also wie du das anwendest?

Also, wir haben ja aufgrund dieser Forschung den Rubric erhalten und grundsätzlich muss ich auch sagen, das hat auch mir als Lehrperson geholfen zu sehen, auf was ich mein Fokus legen muss, wenn ich mit den Schülern mit diesen Argumentationsaufgaben arbeite. Ich glaube ohne das wäre es ein wenig schwammig geworden, ja, auf welche Seite gehen wir jetzt oder was genau ist eine gute Begründung. Es wurde wirklich ein Rahmen gesetzt. Es war sowohl für mich wie auch für die Schüler, sehr hilfreich und auch die Schüler haben mir gesagt, Sie Frau X, das ist super, da sieht man, was muss ich genau machen, auf was kommt es an. Es war natürlich nicht immer ganz einfach, dass sie diesen Rubric auch verstanden haben, was ist das jetzt genau, vor allem mit diesen Niveau-Schritte, wie ist das aufgeteilt, wann ist es das Niveau 3, wann ist es das Niveau 4. Aber es hat den Kindern, also den Schüler, Unterstützung gegeben, um mathematisch zu argumentieren auch.

Was ist dir besonders wichtig beim Unterrichten von mathematischem Argumentieren?

Also für mich ist wichtig, dass die Kinder, die Schüler, begreifen, dass man eine Begründung haben muss, nach Kriterien, und dass man diese nachher auch so weitergeben kann, dass man eben in einen Austausch kommt. Also ich finde der Austausch ist für mich eigentlich, also jetzt wo ich das ein wenig mitverfolgen konnte, das wichtigste und das ist auch…. Heute gerade haben die Kinder mir mitgeteilt, ja der Austausch, das ist das, welches ihnen auch hilft, also wie sieht es der andere, wie können wir das miteinander verknüpfen, vergleichen, anhand mit dem Rubric welchen wir zur Verfügung gestellt bekommen. Also der Austausch finde ich bei den Argumentationsaufgaben sehr wichtig.

Hör ich das richtig heraus, dass dann auch die Kinder noch einmal extra motiviert sind, um die Aufgaben gut zu lösen und gut zu begründen?

Mhm, sie sind dann, also meine jetzt vor allem, waren motivierter miteinander als allein. Allein sind sie immer so ein wenig, äh, wie gehen wir jetzt vor, und miteinander kamen sie schnell in den Austausch und konnten dann so eine mögliche Argumentation für die Aufgabe entwickeln. Ich fand es schwierig, gerade wenn es so im Gruppenprozess war, man kann natürlich nicht überall dabei sein und mithören und ich habe dann auch schon erlebt, dass es dann ein bisschen weniger in die Tiefe ging und da ist halt ein bisschen die Gefahr, dass man das nicht so kontrollieren kann, wie fest sie in die Tiefe gehen. Natürlich, wenn ich unterstütze, ist es schon so, dass sie mehr in die Tiefe gehen und sich etwas mehr bewusst sind und sich vielleicht auch ein wenig mehr darunter vorstellen oder überlegen. Ja, das empfand ich so als ein wenig schwierig.

Interview 2

Was ist mathematisches Argumentieren? Was sind Merkmale?

Die Kunst ist Mathematik mit genauen Begriffen erklären zu können. Dies fordert ganz viel Verständnis. Ja, es ist nicht einfach ein Lösen nach Schema, sondern ein wenig breiter darüber reden zu können. Ja ist es so ein wenig, das sind Merkmale würde ich sagen.

Was ist dann typisch im Unterricht, wenn mathematisches Argumentieren stattfindet?

Es ist lauter als sonst (lacht). Wenn es funktioniert. Sie sprechen, sie verhandeln auch zum Teil, sie behaupten, Gegenbehauptungen und das macht es so spannend.

Was machen die Schüler und Schülerinnen dann ganz konkret, wenn sie mathematisch argumentieren? Ist das nur ein Reden oder geschieht da noch mehr?

Nein, sie machen Skizzen, sie versuchen ihre Ideen natürlich den andern irgendwie rüber zu bringen, manchmal mit Händen und Füssen, aber etwas aufzuzeichnen ist immer ein guter Weg und das finden sie meistens recht schnell heraus. Oder auch ein Blickwinkel einzunehmen, wie die Aufgabe heute mit dem «Schrägen», dass man sagt, ich muss mal dahin und das so anschauen und manchmal kann man wieder so. Ja, manchmal nicht einmal ein mathematischer Weg oder Erklärungen etwas mathematisch zu erklären.

Und dann arbeiten sie viel in Partnerarbeit, wenn mathematisches Argumentieren stattfindet?

Wir haben, ähm, Partner ist schon, ja das bietet sich an. Da kann man die Besseren etwas weiter gehen lassen. Gruppenpuzzle ist auch etwas, was ich sehr gerne mache. Wo sie zum Teil allein etwas müssen, nachher mit der Gruppe abgleichen oder halt, ja das Placemat ist auch so etwas, so eine Variante, wo gut funktioniert, wo sie auch einigen müssen. Das ist noch spannend, wenn du zwei Starke dabeihast, dass die dann wirklich auf eine Lösung kommen, denn es ist ja schon noch wichtig, dass es ihre Lösung ist. Also es kommt so ein wenig, das Gruppendynamische kommt sehr stark hervor. Das ist für mich natürlich sehr spannend.

Was ist dir wichtig beim Unterricht vom mathematischen Argumentieren?

Ja, sie möglichst…. (Pause). Das schwierige ist manchmal, dass man zu viel verratet natürlich. Wenn man dazukommt und man weiss ja wie es geht und das dann ein wenig auszuhalten, dass sie vielleicht ein wenig auf Irrwegen sind. Ein bisschen spüren, wo macht der Irrweg aber auch noch Sinn und wo interveniert man ein wenig und gibt vielleicht wieder einen Hinweis. Man muss auch die Kinder gut kennen, wo kann man wieviel verlangen, dass sie sich nicht ausklinken sonst ist es, gerade für schwächere dann schwierig und du hast sie verloren. So ein bisschen den Mix finden, wo braucht es was.

Also zwischen Erklären und selbst Entdecken lassen?

Ja. Und wie schnell gibst du ihnen wieviel. So dass die Motivation hoch bleibt. Weil wenn sie sich ausklinken, dann stören sie natürlich alles und das ist dann schade.

Also du sagst du erklärst und versuchst sie trotzdem noch, den Weg selbst entdecken zu können?

Ja du versuchst ihnen einen Hinweis zu geben, so dass du ihnen nicht gerade die Lösung gibst, einen kleinen Schupf geben, so dass sie aber doch selbst darauf kommen. Dies gelingt manchmal, manchmal nicht. Manchmal sagst du zu viel, oder jemand hört zu, wenn du es hier drüben machst und kommt durch das schon weiter, je nach dem. Es gelingt manchmal, und manchmal nicht.

Oder manchmal auch, wie du gesagt hast, der Austausch unter den Kindern selbst, mit Placemat, wo sie es dann gut untereinander erklären können.

Interview 3

Was ist mathematisches Argumentieren, was sind die Merkmale davon?

Also die Merkmale, die haben wir jedes Mal. Das ist wie ein Ritual. Die hängen da vorne.

Das wäre Nachvollziehbarkeit für andere, also dass sie es übersichtlich darstellen, dass andere verstehen, was sie gerechnet haben. Dazu gehört sicher auch die richtige, korrekte Lösung, hilfreiche Bilder. Ich sag ihnen manchmal auch, mathematische Sprache gebrauchen. Ja, das ist es glaube ich in etwa. Und für mich ist es, jetzt, ich habe vorhin schon gesagt, ich habe lange, lange, lange nicht mehr unterrichtet auf dieser Stufe, vor fast 40 Jahren das letzte Mal, und bin überrascht, wie die Kinder jetzt, über diese Zeit, eigentlich weggekommen sind, von diesem einfachen Zahlen zufällig miteinander verknüpfen. Sie überlegen warum, wie, sie wissen auch jemand anderes muss das verstehen, warum ich das so mache, das heisst sie müssen selbst wissen, warum sie es so machen. Also es ist viel, viel weniger, dass sie sagen, ja einfach, weil diese Zahlen sich jetzt einfach so anbieten, dass man sie teilt oder mal rechnet, oder plus oder wie auch immer und das ist für mich schon sehr eine Annäherung an das mathematische Denken.

Schön, ich gehe hier gar nicht mehr weiter darauf ein. Was ist typisch in Ihrem Unterricht, wenn mathematisches Argumentieren stattfindet?

Also es ist, wie das Ritual, die Plakate, die Streifen, die bekannten, die hängen dort und es gibt kein Richtig und kein Falsch, also doch, bei der Lösung natürlich schon, aber sonst, der Lösungsweg, der darf sehr individuell sein und auch sehr ungewöhnlich und es findet auch immer wieder statt. Schon in der ersten Lektion hat jemand einen komplett anderen Lösungsweg herausgefunden und kam dann aber auch zu einer anderen Lösung, bei dieser Eis-Aufgabe, ich habe mich sehr gefreut. Sie haben schnell gemerkt, ich freue mich, wenn etwas Unübliches, etwas Unterschiedliches, wenn nicht alles genau gleich ist, wie man auf unterschiedlichen Wegen zum Ziel kommt. Das ist, glaub ich, typisch in diesem Unterricht und da sind sie auch wirklich fest daran, könnte es auch noch anders sein.

Was ist denn schwierig beim Einführen oder beim Argumentieren? Oder was gelingt besser, wo haben sie noch ihre Schwierigkeiten?

Manchmal bleiben sie wie stecken und wenn man dann, wie zum Beispiel heute mit dieser Nuss-Aufgabe, gewisse Sachen gefehlt haben. Und da sind sie immer noch so ein wenig fest am «schülerlen». Es braucht ein wenig Mut, heute vielleicht auch gerade noch wegen dem Video (lacht), zu sagen wieviel Gramm sind denn ein Kilo, dass man solche Sachen, sie meinen sie müssen alles haben. Und das ist auch hier, weniger als sonst, aber auch hier findet das immer noch statt, dass man meint, man müsse alles haben. Also das Vorwissen, das muss man doch haben. Das ist das eine und das andere, sie fallen manchmal auch rein, dass sie die Begründung vergessen, dass sie einfach darauf los rechnen, weil sie es haben und dann vergessen sie die Begründung und das finde ich dann manchmal, wenn wir in dieser Stunde sind, dann möchte ich dann schon, dass man begründet, dass man eine Begründung hat, warum ist das jetzt so. Und sei das nur mit Pfeilen, oder die Reihenfolge, was habe ich gerechnet.

Fällt das Schülern, welche sehr gut in der Mathe sind und die Lösung eigentlich schon im Kopf haben, fällt das diesen schwerer in dem Fall?

Diesen fällt es schwerer, ja. Das einfach das Normale, Selbstverständliche für sie, Selbstverständliche, wie auch noch auseinander zu nehmen oder Schritt für Schritt zu machen und auch zeigen, was sie gedacht haben. Das geht offenbar blitzschnell manchmal, zack und man sieht es, man hat es und dann. Wie habe ich jetzt gerechnet? Ich habe doch überhaupt nicht gerechnet? Ich habe es ja gesehen!

Das dann zu begründen?

Ja, das bewusst machen.

Was ist Ihnen wichtig beim Unterrichten von mathematischem Argumentieren?

Dass das Begründen wirklich auch, dass Begründen da ist, dass sie es begründen können, dass sie selbst gedacht haben, warum rechne ich jetzt so und nicht anders und dass sie es nachvollziehbar machen können. Weil, ich habe gerade in der Begabtenförderung sehr oft erlebt, dass Kinder dann einfach etwas bereits gesehen haben, aber auf ihre manchmal ganz spezielle Art, dass sie gekritzelt und gekitzelt haben und danach nicht sagen konnten, was ist jetzt da passiert. Und im Prinzip, natürlich hat das einen Wert, aber wenn ich jetzt an Weiter denke, das wird schwierig. Also wenn es einmal ein Wissenschaftler ist, es soll für andere nachvollziehbar sein, sonst nützt das halt dann vielleicht nichts. Und das ist mir wichtig, dass sie das von klein auf, gerade diese Kinder, auch lernen. Und was mir hier auffällt, bei den anderen, welche eher Mühe haben, gerade bei der Placemat-Methode, habe ich mehrfach festgestellt, wenn sie nicht den Stress haben, ich muss von A bis Z alles richtig haben, sondern ich kann mal irgendwo beginnen, meinen Gedanken sagen. Es hat kein Kind in dieser Klasse noch nie einen hilfreichen Gedanken hineinbringen können, also jedes hat schon

hilfreiche Gedanken, wo andere weitergeführt hat, hineinbringen können und das ist natürlich, das ist mir sehr wichtig.

Sie sagten gerade, die Nachvollziehbarkeit, dass die Kinder manchmal gar nicht sagen können, warum sie darauf gekommen sind, wie können Sie das fördern?

Eines ist sicher, dass sie Platz haben. Da bin ich letztes Mal reingefallen, ich teilte ihnen einfach ein Blatt aus und hatte das Gefühl es habe schon noch Platz, freien Platz. Aber dass es wirklich ein Blatt ist. Das habe ich schon früher festgestellt, wenn sie ein leeres, freies Blatt haben, dann stellen sie es besser dar. Also, dass eine Darstellung da ist, dass sie, schon vom Gefühl her, ich habe genügend Platz, um das aufzuschreiben, was ich denke. Das hilft. Und auch, wir haben diese Begründung, also was gehört zu einer mathematischen Argumentation, das Plakat, welches Sie gesehen haben, welches an der Tafel hängt, da haben ja die Streifen verschiedene Farben. Ich lasse sie sehr oft in diesen Farben, entweder beieinander oder bei sich selbst, welches wäre jetzt das in meiner Begründung oder in meiner Lösung. Ja. Dass sie einfach immer wieder bewusst machen, wo ist es jetzt nachvollziehbar für andere, wo ist mir das gelungen. Dann natürlich, wenn sie wissen es ist richtig, dann unterstreichen sie es gerne (lacht), Bilder, Pfeile machen in diesem Blau, das ist jetzt ein hilfreiches Bild.

Und das Plakat, das hängt auch wirklich immer?

Das ist wie ein Ritual, jedes Mal, und die ersten paar Mal ist halt auch jedes Mal das Placemat, hatten wir vier am Tisch, das Plakat lag darauf, ob wir es gebraucht haben oder nicht. Das war wie ein Ritual. Ja. Aber das Plakat hängt immer.

Die Fragen sind schon durch. Aber Sie dürfen gerne noch ergänzen, wenn Ihnen etwas in den Sinn kommt, wo Sie jetzt gerne noch sagen wollten, präzisieren oder Ihnen gerade noch wichtig sind.

Also sowohl die Kinder als auch ich, wir haben riesige Freude an diesen Lektionen und weil die Klasse nicht gut aufgelegt war, in meinen Augen, mit den ersten Aufgaben, mit den ersten Themen, fand ich, ich werde lieber dieses Rechnen, das Operieren, Mathematisieren heisst es glaube ich, weiter üben, dass sie richtig die Grundlage haben und werde einfach immer die Lektion Sachaufgabe… Aber jetzt kommt das andere Thema, Sachaufgabe, und ich freue mich sehr, ich bin sehr gespannt und ich glaube da wird auch, da wird auch viel begründet werden. Und es hat, sie begründen überhaupt jetzt viel mehr, nicht nur in der Mathe. Sie erzählen viel, warum sie etwas jetzt machen, oder was ist und sie suchen auch in anderen Fächern, ja in anderen Situationen nach dem, quasi Unüblichen, man könnte es auch noch so sehen und «Was denken Sie dazu?», kommt häufig. «Wir haben das und das gemacht, wir hätten das auch noch so machen können». Ich finde das super, es hat den Horizont erweitert in dieser Klasse. Ganz offensichtlich.

Interview 4

Was ist mathematisches Argumentieren für dich? Was sind Merkmale davon? Was passiert dort genau?

Also jetzt einfach von den Kindern aus (bedeutet es) eigentlich, dass sie eine Rechnung lösen können, oder jetzt einfach eine Aufgabe und nachher erklären oder darstellen können, wie sie das genau gemacht haben oder (erklären können) wieso, dass das jetzt richtig ist.

Mhm.

Eigentlich, ja eben, dass es erstens, verständlich ist und dass es jemand anders auch nachvollziehen kann, was dieses Kind überlegt hat und das war zum Teil jetzt im Unterricht ein bisschen schwierig für gewisse Kinder. Also weil es für gewisse Kinder schon eine Herausforderung war, überhaupt eine Aufgabe durchzulesen und zu verstehen und sie sind gar nie denn, überhaupt «dricho», etwas zu analysieren und dann zu rechnen und nachher zu sagen «Wieso habe ich es so gemacht?», weil es «recht», ja, aus vielen Schritten besteht, es (das Kind) muss zuerst ja schon eine Aufgabe verstehen, bevor man diese nachher erklären oder begründen kann. Und so Merkmale sind eigentlich ja, dass es halt eben übersichtlich ist und für andere verständlich, auch so ein bisschen Schrittweise, also es geht ein bisschen in das Verständliche hinein … schrittweise erklären … mit Zeichnungen, das ist für Kinder eigentlich noch einfach, wenn sie Zeichnungen oder Skizzen machen können oder oft hat auch geholfen, wenn man gesagt hat «Markiere es doch mit Farben, was du dir überlegt hast.», das war für viele eigentlich noch einleuchtend.

Okay. Ähm, was ist denn typisch im Unterricht, wenn mathematisches Argumentieren stattfindet? Ich denke, du hast jetzt schon zwei, drei Dinge erwähnt, eben so Tipps, welche du ihnen mitgibst, (das) mit (den) Farben (zum Beispiel).

Ja, dass sie sich eigentlich überlegen, wie mache ich das, dass es jemand anderes versteht. Also, eigentlich, ja, erstens ein wenig hinterfragen «Kann das sein?», was ich auch bei ein paar Aufgaben gesehen habe ist, dass eine Aussage stand und sie müssen dann überlegen, ob das wirklich sein kann. Und halt auch, was für viele Kinder schwierig ist, ist eben so ein wenig Lösungswege aufzuschreiben, nicht nur im Kopf zu überlegen, sondern das dann auch auf Blatt (Papier) zu bringen.

Und was ist dort typisch im Sinne von deiner Arbeit im Unterricht, wenn du, eben, sie jetzt eben unterstützt in diesen Bereich? Wie sieht das aus?

Ja eben, eigentlich kann es sein, dass ich eine Gruppe unterstütze, also so ein bisschen mit gezielten Fragen, oder dann halt einzelne Kinder. Also eigentlich schon die beratende Funktion, was ich dann aber merke, dass ich, oder zum Teil auch die Studis, fast ein wenig an den Anschlag gekommen sind, wenn vier, fünf Kinder (da) sind, welche so ein bisschen Mühe haben in diesem Bereich …, dass es dann wie – Eben man kann zwar dann mit dem Placemat, (dort) ist es ja zum Teil die Zeit vorgegeben,

und dann hat es vielleicht vier, fünf Kinder, welche man beraten muss, und du kannst nicht überall sein. Und dann zum Teil auch, halt auch, damit umzugehen, ok, es wird halt nachher in der Gruppenarbeit, und dann helfen dann halt die anderen Kinder mit, oder …

Was könnten denn, was sind denn. Du hast vorher angesprochen, dass du die Kinder unterstützt mit verschiedenen Fragen. Vielleicht könnten wir gleich so eine Beispielaufgabe, kannst du diese kurz beschreiben und vielleicht nennen, was für Fragen das denn so sind?

Also, bei ga …, also jetzt die Kinder, die wirklich nichts können, ist es nur schon darum gegangen, was sind denn, oder was bedeuten denn die einzelnen Wörter. Also wenn sie Ziffern nicht verstehen, dann mal an einem Beispiel aufzeigen, was das überhaupt heisst «Was ist eine Ziffer?» und dann auch so ein bisschen «Welche Zahlen oder welche Ziffern hast du überhaupt zur Verfügung?» Und was mache ich, zum Beispiel bei dieser Aufgabe, welche beim letzten Mal vorgekommen ist, wo sie eine möglichst grosse Zahl bilden mussten. So ein bisschen überlegen, ja «Was hilft ...» oder «Was ist denn zum Beispiel, wenn die grösste Zahl (meint Ziffer) hinten ist, bei den Einern?» oder «Was ist, wenn sie bei den Hunderten ist?» … Einfach so ein wenig konkret, ja so ein bisschen in die Richtung leiten oder eben durch gezielte Fragen.

Ja, mhm.

Oder was halt auch hilft, oder was ich dann noch gemacht habe, ist, Material hervor zunehmen. Aber das mache ich auch sonst im Unterricht. Also eben Ziffernkarten hervornehmen, damit sie trotzdem gleich handeln können, probieren Hilfsmaterial zur Verfügung zu stellen.

Mhm. Okay. Was ist dir denn wichtig, ähm, im Unterricht mit dem mathematischen Argumentieren?

Dass sie es eigentlich möglichst genau aufschreiben und was bei ganz vielen Kindern schwierig ist, eben nicht nur Schreiben, sondern auch Skizzen machen oder ja eben, wie Farben… Sie, also ganz viele Kinder sind noch nicht so weit, sie schreiben dann einfach mal (drauf los), weil sie das Gefühl haben, das ist diese Variante, mit welcher ich etwas erklären kann.

Mhm. Also du sagst, dass sie es möglichst genau aufschreiben?

Also aufzeichnen oder einfach so ein bisschen schrittweise bei jedem Punkt.

Mhm. Okay. Also nicht nur die Begründung aufschreiben, sondern…

Die Zwischenüberlegungen.

Mhm.

Ja.

So eine Transparenz herstellen.

Ja. Aha. Okay. Gut, super. Du hast jetzt schon sehr viel über mathematisches Argumentieren und Feedback erzählt. Gibt es etwas, was du noch anfügen möchtest oder speziell betonen oder herausheben möchtest? Oder etwas noch präzisieren?

Ähm (überlegt). Dass es eher für die schwächeren Kindern, also jetzt einfach so ein bisschen nicht nur unbedingt in der Mathematik, sondern auch sprachlich eine Herausforderung ist oder eine grosse Herausforderung, weil sie sich dann eben zum Beispiel gar nicht richtig auf eine Aufgabe einlassen können oder gewisse Sachen, dass man eben ganz viel Inputs geben muss, dass sie dann zum Argumentieren kommen können, wenn sie dann so die Aufgaben schon gar nicht richtig verstehen.

Mhm.

Einfach so, man müsste schon ganz viel Sachen auch schon vorher (machen), dass sie, ja, zu diesem Schritt kommen (können).

Zu welchem Schritt?

Zum Argumentieren.

Zum Argumentieren?

Ja.

Okay. Also jetzt bezogen auf das mathematische Argumentieren, …

Ja, ja.

…, dass viel …

Ja ganz viel Kompetenzen eigentlich vorher da sein müssen, dass sie überhaupt mathematisch argumentieren können.

Interview 5

Was ist mathematisches Argumentieren? Was sind so Merkmale dafür?

Ähm, mathematisch argumentieren, also, das erste was mir eigentlich in den Sinn kommt, generell beim Argumentieren, jetzt auch in Bezug auf die Mathematik, dass halt da die Sprache in den Vordergrund rückt. Und ähm, dass die Schülerinnen und Schüler eigentlich nicht nur die Rechnungswege beschreiben, welche sie sich eigentlich gewohnt sind oder was sie sich unter Mathematik vorstellen, sondern, dass sie das auch noch in Wort fassen müssen. Da baut natürlich auch noch eine gewisse Schwierigkeit darauf auf, wie die Fachsprache, welche ins Spiel kommt und ähm ja, bei mir, wie ich es so erlebe, sie müssen ihre Lösungswege einfach begründen können, Vermutungen, ähm, erläutern können und eben, die Sprache ist komplett im Vordergrund. Ähm, und das ist für gewisse, habe ich gemerkt, tatsächlich jetzt noch ein bisschen ungewohnt.

Ja.

Also, dass das jetzt in den Vordergrund rückt.

Und was gelingt denn besser? Also, Sie sagen auch wieder, es ist eine Schwierigkeit. Was ist, gibt es auch Sachen, welche besser gelingen? Mit dem Argumentieren, (Dinge) welche jetzt besser wurde bei den Schülern?

Ja, es ist einfach ein bisschen ein Bewusstsein geschaffen worden, dass eben das auch im Fokus stehen kann in Mathematik. Also es geht nicht nur darum, dass man jetzt ähm …, sie hatten natürlich (selbstverständlich) einfach eine ganz andere Vorstellung von Mathematik, dass man einfach rechnet. Sie sagen «Wir rechnen mit Zahlen» und ähm, jetzt, dass man jetzt noch Sätze schreiben müsste und so, dass kommt ihnen nicht als (erstes), in den Sinn. Wenn ich jetzt am Anfang mal gesammelt habe, was sie sich darunter vorstellen, das war für sie kein Thema und ja, ähm, es ist jetzt einfach, ähm, für gewisse auch sehr schwierig, da jetzt zu sein, da rein zu kommen (sich daran zu gewöhnen). Aber klar, sie wissen jetzt (nuschelt) auch ein bisschen, um was es geht und sie sind ein wenig sensibilisiert auf das Ganze. Weil am Anfang, ähm, war es noch schwierig einen Satz (aus den Kindern) heraus zu bringen, oder. Sie haben in kurzen, knappen Stichworten geantwortet und das war relativ schlecht nachvollziehbar für jetzt eine aussenstehende Person und in diesem Bereich, denke ich, haben einzelne schon noch Fortschritte gemacht, also auf jeden Fall, aber andere haben nach wie vor Mühe, würde ich jetzt behaupten.

Mhm. Ähm, was ist so typisch im Unterricht wenn mathematisches Argumentieren stattfindet? Wie sieht das so in Ihrem Unterricht aus?

Ja wichtig ist halt, wenn, eben das Argumentieren in den Vordergrund rückt, dass es auch Möglichkeiten gibt für den Austausch. Oder wenn dann natürlich, ähm, wenn Argumentieren, ähm, (stottert) in den Vordergrund rückt, dann schaut man auch, dass man kooperative Lernformen zum Beispiel einführen kann - ähm, die klassischen Methoden (wie) Think-Pair-Share, DAV (denken-austauschen-vorstellen), welche man auch immer lernt in Weiterbildungen oder an der PH – dass die Kinder, dass die Kinder wirklich auch Gelegenheit erhalten, sich auszudrücken und sich auch gegenseitig, ähm, Rückmeldungen zu geben über Mathematik einfach (schweizerische Bedeutung, also <u>nicht</u> Gegenteil von schwierig) zu sprechen, ähm das passiert natürlich (selbstverständlich) nicht während einer Einzelarbeit, sondern man muss wirklich, ähm, das einführen im Unterricht, damit die Kinder sich austauschen können in Gruppen, ähm und auch in Zweierteams und auch voneinander lernen können, einander Feedbacks geben et cetera , also alles was dazu gehört. Einfach die Sprache muss in den Vordergrund gerückt werden und das passiert, indem eben über Mathematik gesprochen wird.

Ähm ja, wenn Sie gerade von der Sprache sprechen. Die Darstellungsformen ändern sich auch oder gibt es da keine grossen Veränderungen?

Ja, wir haben jetzt ähm, einfach ein bisschen festgestellt, dass bei dieser Unterrichtsreihe jetzt auch, das haben die Kinder zum Teil auch festgestellt, dass ähm, wenn sie sich eben gegenseitig etwas

erklären zum Beispiel, dass es ja nicht nur um die Sprache geht, ähm und ähm und um Buchstaben und Ziffern oder Zahlen, sondern auch Skizzen helfen können, oder. Also, das war für sie auch so ein bisschen, nicht so bewusst, hatte ich das Gefühl am Anfang. Und, dass man auch mit Skizzen sehr gut erklären kann, mit, ähm, den verschiedenen Darstellungsformen und ich denke das ist bei gewissen (Kindern), also ich hoffe es zu mindestens, ich habe das Gefühl, in den Vordergrund gerückt. Oder auch mit dem Rubric, weil es ja ein Bestandteil davon ist, dass man auch, ähm, ein wenig aus das, ähm, achtgibt.

Sie erwähnen den Rubric. Können Sie das ganz kurz erklären, was das ist der Rubric?

(lacht) der Rubric?

Ja. (lacht). Gern, sorry.

Ja ich meine, es ist ja, ähm, wie soll ich sagen, es ist, sind argumentieren, wir haben ja den Fokus auf das Argumentieren und Begründen gelegt, das sind ähm Teilkompetenzen in diesem Sinne und, es ist relativ komplex, der Rubric ist einfach eine gute Form, um ähm, Teilkompetenzen in jeder Unterrichtsreihe, welche wir jetzt haben, fördern zu können, also mit diesen zu arbeiten und (diese) zu optimieren. Und, ähm, wir haben vier Kriterien bei unserem Rubric, zum Beispiel ähm, ähm, Vorgehensweise oder auch korrektes Rechnen, ähm Begründen, einfach das, auf was wir den Fokus oder Wert legt, ähm mit vier Abstufungen. Und der Vorteil vom Rubric jetzt im Unterricht, ist jetzt, dass eben einerseits ich den Kindern eine Rückmeldung geben kann, sie haben eine klare Voraussetzung, welche gegeben sind und sie können sich auch selbst einschätzen, das ist sicher auch ein Vorteil vom Rubric jetzt und selbst auch anderen Tipps geben und andere, ähm, einschätzen, also Selbst- und Fremdbeurteilung so zu sagen, ist auch möglich. Für die Kinder und für mich natürlich auch. Für das Feedback.

Ja. Ähm, was ist Ihnen wichtig beim Unterrichten von mathematischem Argumentieren? Auf was legen Sie Wert?

(überlegt) Ja also, sicher eine Herausforderung ist ja generell die Sprache. Wie schon gesagt, also, für gewisse Kinder ist die Sprache in allen, in viele Fächern eine grosse Herausforderung, oder. Und in der Mathematik kommt ja noch hinzu, dass die Fachsprache, ähm, sehr wichtig ist. Und ich denke, es ist sicher wichtig, dass man, ähm, mit den Kindern auch diese Fachbegriffe thematisiert, oder. Wenn sie einfach sind multiplizieren, addieren, einfach, dass sie ein bisschen den Fokus darauflegen, dass diese Fachsprache auch verwendet wird, dass eine gute Argumentation, wie man sie in der Erwachsenenwelt kennt, lebt ja dann auch ein bisschen von dem. Und, damit es dann aber möglich ist, muss man es auch, ähm, behutsam eingeführt werden und den Kindern auch bewusst gemacht werden und den Kindern auch klar sein, ähm, um was für Begrifflichkeiten es sich es dabei handelt. Ich denke einfach, die Sprache, die Fachsprache, dass man diese thematisiert, finde ich noch wichtig

beim mathematischen Argumentieren, nebst dem Punkt, dass auch die Zeit für den Austausch vorhanden sein muss.

Interview 6

Was ist mathematisches Argumentieren? Was sind Merkmale? Ganz allgemein.

Ähm, ja ich denke es geht vor allem darum, dass man seinen Weg, welchen man gewählt hat, um eine Aufgabe zu lösen, begründen kann. Und weil es eben zum Teil auch kein Richtig oder Falsch gibt - wie jetzt bei dieser Aufgabe heute, welche wir heute gehabt haben mit diesem Überschlagen/Schätzen – ähm, dass die Kinder wie auch merken «Aha, okay, man kann das jetzt vielleicht auch noch etwas anders sehen, es kommt drauf an, was man alles dazu zählt.» und wichtig ist wirklich, dass man das gut begründen kann und auch, dass der ganze Lösungsweg eigentlich, ähm, wie sagt man? Ähm, zurückzuverfolgen ist, dass man wie schauen kann, ah ... aus diesem und diesem Grund ist das Kind auf diese Lösung gekommen. Und ja sie, die Kinder, lernen eigentlich, ähm, wie so ein wenig, ähm, wie sagt man? Sie lernen wie so ein bisschen das Ganze noch so einmal zu überdenken, noch einmal zurückzuschauen (und zu überlegen) «ah, macht das überhaupt Sinn?», und das denke ich, ist vor allem Argumentieren, dass sie sich das ganze eigentlich noch einmal durch den Kopf gehen lassen und (sich fragen) «Kann das überhaupt sein? Ist das realistisch?». Das ist eigentlich für mich mathematisches Argumentieren.

Was ist denn typisch in deinem Unterricht, wenn dann mathematisches Argumentieren stattfindet?

Ähm, also typisch ist vor allem, dass sie halt wie (schweizerische Bedeutung) miteinander agieren, was vielleicht sonst bei einem Mathematikplan, wenn wir sonst damit arbeiten, tauschen sie sich wie weniger, ähm, so aus oder so diskutieren, dann ist es halt eher (so:) die Aufgaben werden gelöst oder es werden Spiele gespielt oder Aufgaben am Computer gelöst und dann ist es wie nicht so eine Interaktion, welche stattfindet. Und ich habe jetzt bei diesem Forschungsprojekt gemerkt, die Kinder lernen wirklich mit der Zeit, ähm, «wie kann ich argumentieren? Was muss ich sagen, damit das andere Kind mit eigentlich die…, die Lösung», also ja, dass das andere Kind findet «Ja moll, diese Lösung ist plausibel, das ergibt Sinn, das ist zurückzuverfolgen.» und es findet einfach wirklich, bei meiner Klasse vor allem, der Austausch statt, also ein reger Austausch, würde ich jetzt sogar sagen, das hast du (Interviewer) heute vielleicht auch so ein bisschen gesehen (lacht). Und, ähm, es braucht einfach extrem viel Zeit. Also man merkt, ähm, sie machen Fortschritte und es, ich denke es, es hat ihnen auch bis jetzt schon etwas gebracht, aber man muss einfach sehr viel Zeit investieren. Ich denke, dass ist ähm, es füllt relativ viel, ähm, im Unterricht. Also einfach so einzelne Lektionen habe ich jetzt auch gefunden, machen zum Teil nicht so Sinn, weil meistens, wenn sie so richtig reinkommen (ins Thema), ist schon eine Halbstunde vorbei und dann möchte ich sie eigentlich auch nicht einfach unterbrechen und sagen «Ja, und jetzt ist die Lektion vorbei und jetzt machen wir sonst an

Mathe weiter», sondern ich habe es dann meistens noch weiterlaufen lassen und dann nach einer Stunde meistens etwa dann Schluss, also ja den Schluss gemacht. Genau.

Du hast gesagt, es findet ein reger Austausch statt unter den Schülern. Kannst du da vielleicht noch etwas genauer werden? Was machen sie genau?

Also sie, bei meinen Schülern merke ich sie fangen dann extrem an miteinander zu diskutieren, denn jeder will eigentlich seine Meinung vertreten und hat dann das Gefühl «Meine Meinung ist richtig, meine Lösung stimmt, ich habe das ja nachgezählt, ich habe geschaut, ich, ich habe richtig gerechnet.» Sie wollen eigentlich immer ihr, ihr Ding vertreten. Und das müssen, also das haben, ja, ich habe das Gefühl sie merken es dann am Schluss immer, es geht nicht darum «Wer hat die richtige Lösung?», sondern «Wie hat es der andere gerechnet, wie kann ich das Begründen? Was muss ich jetzt genau sagen, damit der andere das eben verstä …, also eben, ja, damit es verständlich ist?» Ja, das ist eigentlich vor allem, dass sie dann wie in ein extremes Gespräch kommen und wie nicht mehr, sie wollen dann eigentlich gar nicht mehr aufhören miteinander über das zu diskutieren.

Und ist da einfach das Gespräch, welches stattfindet oder haben sie auch etwas Visuelles vor sich, mit welchem sie das (Gespräch) mit Skizzen zum Beispiel auch noch unterstützen?

Genau. Also jetzt, heute auch zum Beispiel haben wir, ähm, die Plakate gehabt, in welche sie dann gegenseitig die Beurteilungen hineingeschrieben haben und sie haben dann eigentlich wie anhand von dem und anhand vom Rubric, mussten sie sich dann eigentlich selbst rechtfertigen «Wieso stimmt das?» oder das andere Kind musste dann sagen «Schau, du hast da nur das Niveau 2 erreicht, weil es steht ja da im Rubric drin, dass du eben vielleicht nicht alles korrekt gerechnet hast oder, dass deine Begründung nicht genügend ausführlich ist.» Und sie haben dann wie anhand von dem, ähm, ja, auf das können sie sich eigentlich stützen, wenn sie den Rubric mit ihrer Lösung vergleichen. Und sie haben, ich habe mit den Schülern noch so einen Merkzettel gemacht, welchen wir zum Teil auch noch laminiert haben, und den nehmen sie dann auch jedes Mal nach vorne, wenn wir, ähm, mit diesem Forschungsprojekt arbeiten. Und dort haben sie nicht alle wichtigen Punkte aufgeschrieben, sondern nur diese, welche für sie wichtig sind. Wenn sie zum Beispiel immer vergessen, ähm, eine korrekte Rechnung zu machen, dann haben sie das dort aufgeschrieben. Und sie haben einfach ihre wichtigen Punkte dort aufgeschrieben, damit sie wie auch immer wissen «Ah, auf was muss ich genau schauen?» ja, es dient so ein wenig als Gedankenstütze eigentlich.

Also dann hast du mit dem Rubric gearbeitet und dann dort sind dann halt recht viele Punkte drauf, hast du das dann wie auf die einzelnen Schüler heruntergebrochen, dass sie dort diese Dinge herausnehmen, welche für sie wichtig sind?

Genau. Also sie durften selbst auswählen, was auf den Merkzettel kommt, aber ich habe ihnen natürlich (selbstverständlich) Tipps gegeben «Was könntest du darauf nehmen?» oder «Schau einmal nach…», ich habe zum Teil auch Aufgaben beurteilt, welche sie gemacht haben in diesem, also zum

Beispiel irgendwie Lektion 3 oder so, habe ich dann beurteilt und dann konnten sie wie auch anhand von dem schauen «Ah, in diesem Bereich muss ich noch daran arbeiten, ich nehme das doch auf meinen Merkzettel.». Genau.

Super. Was ist dir besonders wichtig im Unterricht von mathematischem Argumentieren?

Also, wichtig ist mir, dass ich genügend Zeit habe, was sicher so ein bisschen ein Problem darstellt, gerade so in der fünften Klasse, du merkst, jetzt kommt dann bald der Übertritt. Es ist eigentlich etwas mega Wichtiges, dass sie das können, argumentieren, ähm, und begründen, aber man merkt wie manchmal, die Zeit fehlt ein bisschen, denn man hat ja auch noch all den anderen Stoff. Und so Sachrechnen und so stellt dann eigentlich so einen kleinen Bereich dar im ganzen Lehrplan, wo man dann wie merkt, es wird zeitlich sehr knapp, ähm, ich hatte jetzt zum Teil noch die Heilpädagogin dabei, weil ich habe einen IS (Integrieren Schüler) hier… er ist hier. Ähm, und durch dieses IS-Kind habe ich habe ich halt auch mehr die Heilpädagogin zur Verfügung und sie hat dann manchmal, manchmal hat sie es geschafft dann drinnen zu sein und das hat recht (sehr) geholfen, wenn man die einzelnen Gruppen oder die einzelnen Kinder wirklich unterstützen kann und immer wieder Fragen reinbringen kann, also nicht, nicht im Sinn von Hilfestellungen sondern eher Fragen «Ja, wie könntet ihr jetzt da weitermachen?» oder «Wie kommst du überhaupt darauf?», wie ich immer Inputs geben. Und wenn ich allein bin, merke ich schon, es ist dann schwieriger, immer alle Gruppen gleichmässig zu betreuen und wenn ich mit der Heilpädagogin bin, dann geht es wirklich besser. Genau. Das ist, das ist eigentlich das Wichtigste, denke ich.

Gut. Möchtest du sonst noch etwas anfügen, ergänzen, präzisieren oder speziell betonen?

Also ich finde es eigentlich mega eine gute Sache mit, mit dem mathematischen Argumentieren und dass sie, wirklich das mit dem Begründen lernen, ich habe das Gefühl, sie haben schon recht Fortschritte gemacht. Einfach so ein wenig der Weg, wie wir das so jetzt so ein wenig umgesetzt haben im Unterricht, ist manchmal recht erschwerend gewesen oder auch für, für mich so ein bisschen zu sehen, was ist genau das Ziel dahinter? Das war manchmal ein wenig schwierig. Ähm, oder wenn ich die Unterrichtseinheiten angeschaut habe, als ich dachte «Was ist, was wird hier genau verlangt?» auch nicht 1:1, also ich habe es ja mit der Teamkollegin zusammen gemacht, wo wir dann auch nicht 1:1 umgesetzt haben, weil wir dann wie gemerkt haben, es passt zeitlich nicht hinein und es ist auch nicht mit jeder Klasse durchführbar, ausser man ist wirklich gerade zu zweit, also mit einer Heilpädagogin, ja es ist halt wie so ein bisschen, es ist eine Unterrichtseinheit oder ja, eine Unterrichtsreihe, aber man kann wie nicht einfach sagen, dass die auf allen Klassen und in jedem Fall, ähm, anwendbar. Das ist sicher auch nicht ganz einfach gewesen, aber ich denke, es hat viele gute Punkte auch drin gehabt.

Interview 7

Dann fangen wir direkt einmal an! Was ist mathematisches Argumentieren, was sind so die Merkmale von mathematischem Argumentieren? Wir haben die Fragen hier auch noch ausgedruckt damit man sie sieht.

Ja ist das jetzt gemeint von mir als Lehrperson aus oder von den Kindern aus gesehen?

Eigentlich von Ihnen aus, was so Merkmale sind, was ist mathematisches Argumentieren?

Mathematisches Argumentieren ist für mich wenn man eine Aufgabenstellung hat in der Mathematik und eine Lösung dazu, welche aber nicht rein ein Resultat ist, sprich irgendwelche Ziffern aneinandergereiht, oder so sondern für mich besteht das aus einem Lösungsweg, dass ich sehe wie ist man an die Aufgabe herangegangen aus einem Resultat oder vielleicht einem Teilresultat wenn man nicht weitergekommen ist und einer Begründung damit ich erklären kann, was habe ich mir für Gedanken gemacht, wie bin ich vorgegangen und wie bin ich zu diesem Endresultat oder Zwischenresultat gekommen. Also es ist so eine Mischung aus reinen Rechnungen kombiniert mit Sprache um jemandem der diese Aufgabe nicht gelöst hat, oder ja, dass näherzubringen und ihm zu zeigen, wie man vorgegangen ist.

Ja ich wüsste jetzt gar nicht, was ich noch nachhaken sollte. Das sind so die Merkmale. Ja super! Was ist so typisch in ihrem Unterricht, wenn mathematisches Argumentieren stattfindet? Also ganz konkret in Ihrem Unterricht.

Typisch ist in meiner Klasse, das es eine rechte Herausforderung ist Kinder dafür zu motivieren. Ich finde es viel schwieriger das den Kindern beizubringen als irgendwelche andere spezifischen Mathethemen, wie jetzt sag ich einmal rechnen mit den Masseinheiten oder so. Typisch ist auch, dass man viel öfter nachfragen muss. Also ich als Lehrperson kann das recht steuern. Wenn ich jetzt vergleiche, im Moment habe ich das Gefühl frage ich immer noch relativ häufig nach, damit die Kinder konkreter werden aber am Anfang war das ganz extrem, dass ohne ein Nachfragen von den Kindern gar nichts kam. Durch das häufige Nachfragen, was für die Kinder manchmal ziemlich ätzend ist, weil sie denken. «Ah, das habe ich doch schon gesagt oder ich habe die Lösung doch schon gebracht.» Aufgrund von dem haben sie gemerkt: «Ah, ich muss das Ganze ein wenig ausführlicher machen.» Es ist aber mit einem rechten Widerwillen verbunden und ja auch für mich als Lehrperson eben schwierig ihnen aufzuzeigen, wieso wir das genau brauchen. Ich finde die stärkeren Schüler haben gerade mehr Mühe damit das zu verstehen, wieso man das machen muss denn sie kommen ja eh auf das richtige Resultat.

Ehm jetzt gerade zu Ihrem Unterricht, sie haben eine Gruppenform und dann eine Einzelarbeit gewählt. Wie sieht das in Ihrem Unterricht aus, wechseln sie da immer ab, oder?

Ich versuche möglichst abzuwechseln. Ich versuche abzuwechseln beispielsweise in Gruppenarbeiten, dass ich abwechsle zwischen Leistungsgruppen, also die die gleich stark sind aber auch zwischen

heterogenen Gruppen, dass beispielsweise stärkere Schüler den schwächeren helfen können oder diese unterstützen. Mir ist aber auch ganz wichtig das immer diese Einzelarbeit vorkommt, damit ich merke oder damit ich weiss, dass jedes Kind wie allein auch zuerst denken muss. Es wird also irgendwo in einem Prozess immer einen Teil Einzelarbeit geben oder ja ich versuche es, dass ich weiss, dass dieses Kind auch allein denken muss und nachher geht man in einen Austausch über, sei es in einer Gruppenarbeit oder dann im Plenum in der ganzen Klasse wo die Kinder sich dann einbringen können. Ich habe einfach wie das Gefühl durch einen Teil Einzelarbeit sind die Kinder wie ein wenig aktivierter, als wenn es nur in einer Gruppe ist. Aber ich versuche da wirklich recht abzuwechseln und zu mischen, auch eben homogen, heterogen, Gruppenarbeit, Partnerarbeit, Einzelarbeit aber auch im Klassenverband.

Würden Sie sagen es ist allgemein lauter beim Argumentieren oder spielt es zu den anderen Mathestunden keinen grossen Unterschied?

Doch, ich habe das Gefühl es ist lauter, und zwar aus dem Grund, dass sie miteinander diskutieren müssen und sie merken, oder ich habe das Gefühl, je länger wir an dem gearbeitet haben, desto wilder wird es auch, denn die Kinder diskutieren länger über etwas. Sie gehen tiefer, also sie sagen dann halt auch einmal, wenn einer einfach sagt: «Jaja das ist gut für mich» und der andere sagt «nein das stimmt aber nicht!», dort fangen dann eben die Diskussionen an, wieso ist etwas gut oder wieso ist das nicht gut und durch das, dass sie sich dann gegenseitig sagen oder das begründen, wieso sie der Meinung sind, dass dies eine gute Aufgabe oder eine gute Lösung ist, oder eben nicht, sind sie automatisch gezwungen zu einem Austausch weil sonst könnten sie alles in Einzelarbeit machen und dementsprechend ist dann etwas wilder und lauter.

Was ist Ihnen persönlich wichtig beim Unterrichten von mathematischem Argumentieren?

Persönlich wichtig ist mir, den Kindern das wie näher zu bringen weil im Moment sage ich jetzt sind wir auf einem Mathelevel, bei dem es viele Kinder ohne Argumentationen schaffen und ich versuche ihnen immer zu erklären egal auch, auch wenn das Argumentieren nicht das Thema ist vom Matheunterricht also es fliesst ja immer wieder irgendwo rein, aber nicht konkret das Thema ist, dass ich ihnen sage, gerade beispielsweise bei Prüfungen, sie sollen mir Rechungswege oder Vorgehen aufschreiben, weil für einen Vorgang kann ich noch Punkte geben, auch wenn dann halt das Resultat nicht stimmt. Wenn ich nur ein Resultat habe und es ist halt falsch ist es entweder volle Punktzahl oder gar keine Punktzahl. Das war mir wichtig beim mathematischen Argumentieren, dass ich ihnen aufzeigen kann, wieso macht das Sinn und wieso brauchen wir das? Auch den Schülern, die oft das Gefühl haben wir brauchen das gar nicht, denn wir kommen sowieso aufs richtige Resultat.

Interview 8

Was ist eigentlich mathematisches Argumentieren? Was sind Merkmale von mathematischem Argumentieren?

Also mathematisches Argumentieren hat sicher etwas mit… also es muss eine Aufgabenstellung da sein, welche man mathematisch bearbeiten kann. Sei es, dass ich etwas ausrechnen muss oder eine Reihenfolge ergänzen muss und dann nachher, dass was ich bearbeitet habe anschliessend ausdrücken zu können oder so aufzuschreiben, dass man sieht, was ich gemacht habe oder dass man erkennt: «Aha, das ist in diesem Kopf vorgegangen, so hat er gerechnet», jetzt wenn es eine Rechnung ist. Es muss ja nicht zwingend eine Rechnung sein, es kann ja auch etwas zum Schätzen sein. Einfach, dass man damit argumentieren kann: "Was habe ich hier gemacht oder wie bin ich zu dem gekommen, was ich aufgeschrieben habe, also das Resultat.»

Okay. Wenn du jetzt drei Merkmale nennen müsstest?

Schwierig!

Vielleicht auch wenn du daran denkst, was genau die Schüler dabei machen?

Also, sicher die eigenen Gedanken aufschreiben. Dann der Lösungsweg, es muss ja irgendwo ein ersichtlicher Lösungsweg sein. Sei es dargestellt in einer Tabelle etc., oder einfach in einer Rechnung aufgeschrieben. Ja, dass ich das begründen kann, was ich gemacht habe. Nicht nur einfach erzählen, was ich gemacht habe, sondern begründen, wieso habe ich es so gemacht, wie ich es gemacht habe.

Okay. Was ist typisch im Unterricht, wenn mathematisches Argumentieren stattfindet?

Typisch ist eigentlich, dass sie einfach nur das Resultat aufschreiben und dann fertig sind. (lacht) Für sie ist das fertig, es reicht ja, ich habe ja eine Lösung, ich muss es jetzt nicht noch begründen oder mathematisch ausdrücken. Es ist ja schon mathematisch, Zahlen sind ja auch etwas Mathematisches. Und für sie ist es dann schwierig, diese Begründung, dass was sie Denken in Sprache umzusetzen.

Du hast jetzt eigentlich beschrieben, was typisch ist, wenn sie nicht mathematisch Argumentieren. Gibt es dann etwas, wenn sie dann doch einmal so weit kommen oder sich darauf einlassen. Du willst ja eigentlich im Unterricht, dass sie mathematisch Argumentieren. Wie führst du sie dahin, dass es schlussendlich so weit kommt?

Ja schon mit Tipps! Indem, dass ich zum Beispiel sage: "Wie hast du das denn gemacht?». Dann erzählt mir das Kind, was es gemacht hat und ich sage ihm dann, dass genau das, das ist, was ich gerne schriftlich hätte, damit ich das nachlesen kann, ohne dass du es mir noch erzählen musst. Schon ein wenig so, dass ich sie ermuntere, das aufzuschreiben, was sie denken.

Also würdest du sagen typisch ist, du bist unterwegs und gibst Hinweise wie: «Die Rechnung allein reicht nicht, beschreibe mir das Ganze noch.»

Ja schon so. Und dann halt auch, typisch mathematisch ist auch, wenn sie es schon so darstellen können, dass es verständlich ist. Je nach Aufgabe ist es einfacher oder schwieriger darzustellen und dann hilft ihnen diese Darstellung auch etwas. Das ist für mich auch etwas Typisches.

Was ist Dir wichtig beim Unterrichten von mathematischem Argumentieren?

(lacht) Also ich habe jetzt etwa 100 Mal gesagt, dass mir wichtig ist, dass sie das Begründen, was sie machen und auch nicht ausradieren, das ganz klar und offen ersichtlich ist, was sie gemacht haben. Das ist mir das Wichtigste, dass jeder diesen Einblick haben darf, denn das ist unser Ziel, dass sie uns möglichst viel zeigen, was in ihrem Kopf vorgeht. Und ich ermuntere sie auch immer wieder, dass es in diese Richtung geht. Und auch immer wieder ermuntern: «Probiere es mit Farben, versuche es hervorzuheben etc..» Und ein wenig Tipps geben, dass sie noch einen anderen Zugang finden, nebst einfach einer Lösung, die sie gefunden haben, ohne dass sie eine Rechnung dazu aufgeschrieben haben.

Gut, super! Also du hast mir jetzt sehr viel über mathematisches Argumentieren und das Feedback erzählt. Gibt es etwas, was du noch anfügen möchtest oder hervorheben möchtest, stärker betonen willst?

Was ich schwierig gefunden habe, bezogen auf diese Lektionsreihe jetzt, war dieses Tipps geben. Genau das, was du heute gefilmt hast, dieses Feedback geben konkret auf diese Aufgaben bezogen. Und dann, dass es… Also es gibt ja ein Rechnungsproblem, dass man nicht weiss, wie man eine Rechnung bearbeitet und dann gibt es noch, dass man nicht weiss, wie man seine Gedanken aufschreibt. Und ihnen dann nicht die ganze Zeit damit zu verbringen, ihnen bei Rechnungsproblemen zu helfen, was heute mehr der Fall war, dass ich ihnen helfen musste, als dass ich mich irgendwo hätte hinsetzen können und sagen können: «Lies noch einmal deine Begründung.» Das finde ich sehr schwer, dann dort auch Tipps zu geben, denn für sie ist ihre Begründung super, sie wollen da nichts mehr ändern, sie wollen einfach die nächste Aufgabe machen. Und dann dort dranzubleiben und zu sagen: «Lies noch einmal, schau hier komme ich nicht draus, kannst du mir das noch einmal erklären?» Dieser «Anschiss», den sie in diesem Moment haben dann wieder in Motivation «umzupolen», das finde ich sehr schwierig. Auch das richtige zu sagen in diesem Moment.

Hast du ihnen irgendeinen Tipp mitgegeben also so global an alle, was ihnen helfen könnte in diesem Moment vom Argumentieren?

Ja…

So etwas generalisierendes, was man auf mehrere Aufgaben anwenden könnte, seid ihr an etwas vorbeigekommen?

Ja ich meine so etwas war auch in der Lektion vorbereitet. Ich habe das schon angeschaut und sie können es mir auch sagen, sie stehen da und sagen mir: «Ja wir müssten besser begründen und noch einmal durchlesen und so schreiben, dass es alle verstehen», aber wenn sie es dann nicht machen, dann steh ich dann so da: «Ich weiss, dass du es weisst, aber jetzt musst du es noch anwenden!»

Und du traust es ihnen zu, dass sie das formulieren können und dann aufs Blatt bringen können?

Ja, ich traue es ihnen zu, aber irgendwie fehlt… Es fehlt ihnen an Motivation. Ich weiss nicht ob es an der Motivation liegt oder … Ich weiss nicht, woran es liegt, aber ich traue ihnen zu, dass sie es könnten.

Die Vorstellung von Ich bin fertig, jetzt bin ich fertig.

Und ich meine, es ist egal was ich sage, wenn ich ihn zehn Mal an den Platz schicke und sage: «Du hast keine Begründung aufgeschrieben.»

Was ist denn das Typische einer Begründung? An was erkennst du das?

Das Resultat. Bei ihnen ist das Typische von einer Begründung, dass ich ein Resultat habe und die Antwort beantwortet ist. Und bei mir ist es, also sie wissen es, sie sagen es auch, begründen ist, wieso ist das Resultat korrekt? Aber auf das «wieso», wenn ich sie nicht wirklich schon fast zwinge, dass sie dieses «wieso» noch überlegen, denn man muss da ja kurz überlegen und innehalten, dann habe ich keine Chance, dass sie mir das noch aufschreiben und das finde ich schwierig. Wie bringe ich sie dazu, von sich aus, das Ganze noch einmal zu überlegen und nachzudenken, wieso ich das gemacht habe.

Interview 9

Was ist mathematisches Argumentieren. Was sind Merkmale vom mathematischen Argumentieren?

Ehm also für mich ist das mathematische Argumentieren dann da, wenn die Gedankengänge, welche man bei einer mathematischen Aufgabe hat, verbalisieren kann. Wenn man also sagen kann, was man im Kopf gemacht hat, was kognitiv abgelaufen ist ähm ... und dann auch die einzelnen Schritte erklären kann. Wieso mache ich diesen Schritt und dann den nächsten und den nächsten, damit ich dann zu einem Resultat komme. Also, dass wie mein Argumentationsstrang klar verbalisiert wird. Das ist für mich mathematisches Argumentieren. Und dann ist eine Argumentation meistens ein Dialog, also das heisst, es ist dann schön, wenn man es schafft, diese Gedankengänge jemand anderem zu sagen und dann allenfalls zu begründen, wieso ist mein Weg der richtige und nicht der andere. Das ist für mich mathematisches Argumentieren.

Sie erwähnen das Verbale. Ist die Darstellung auch anders als bei der klassischen Mathematik? Hat sich da auch etwas geändert?

Ja also was die Kinder sicher häufiger gemacht haben, als das was sie sonst machen ist, dass sie versuchen die Darstellungsmittel ein wenig zu vervielfältigen. Also es ist nicht nur das «Rechnung aufschreiben» sondern man macht sich dann wirklich auch Gedanken darüber, wieso jetzt genau.

Gerade bei dieser Aufgabenreihe gab es viele Aufgaben mit Ziffern, dann kommt halt wieder die Stellentafel zum Vorschein oder andere zeichnen die Plättchen auf, die sie kennen, um einfach handfeste Beweise zu haben, wieso ihre Argumentation die richtige ist. Darstellungsmittel sind sicher wichtig dort, wo man sie braucht. Sie sind nicht immer von Nöten, das kommt immer auf die Aufgabe an.

Was ist so typisch bei Ihnen im Unterricht, wenn mathematisches Argumentieren stattfindet?

Was typisch ist? (lacht)

Ja.

Also einerseits ist es so, dass die einen Kinder das extrem gerne machen. Ich habe das Gefühl, es gibt wie zwei Gruppen. Die einen, die sich für das begeistern können, die finden «doch» und auch den Sinn dahinter erkennen, wie sie sich entwickeln können, wie sie merken: «Ah das bringt mir etwas. Ich kann nachher wirklich detailliertere und genauere Resultate und Lösungswege und das Vorgehen besser aufschreiben und so weiter und sofort.» Also da entfacht wirklich ein Feuer. Es sind auch «AHA- Erlebnisse» da, das ist das eine und das andere aber wirklich, bei Kindern, bei denen es nicht klappt. Die es nicht verstehen, wieso dass es noch einmal erklären muss, wieso muss ich das Ganze noch jemand anderem erklären? Gerade dann, wenn es offene Aufgaben sind oder mehrere Aufgaben oder mehrere Resultate möglich sind, mehrere Vorgehensweisen möglich sind. Ich habe teilweise das Gefühl, es ist auch ein wenig eine Überforderung dann, dass sie damit wie nicht umgehen können. Es ist dann halt nicht «5+5=10», sondern es ist dann halt «Ah es haben so viele Dosen darin Platz, wie sieht dann dieser Karton aus, muss ich den Deckel schliessen, kann ich den Deckel offenlassen? Ist der Karton überhaupt gerade, ist der Karton schräg?» und so weiter und so fort. Und das finden die einen ja (nicht so toll). Und das ist typisch. In meiner Klasse merkt man wirklich, dass es wie so zwei Gruppen gibt. Ehm, darum ist das typisch für den Unterricht. Was auch typisch ist von der Methodik her, also man muss, glaube ich, dass es sinnvoll funktioniert, wirklich schauen, dass die Kinder wirklich auch zum Reden kommen. Also dass es mündlich stattfindet und nicht nur auf Papier. Also das heisst, nicht nur einfach für sich selbst, sondern dass sie es wirklich noch einmal im Dialog mündlich wiedergeben können, dass sie wie realisieren wieso man das macht.

Wie fördern sie das, dass dieser Dialog zustande kommt? Haben Sie da bestimmte Methoden, wie sie dann schauen, dass es zu diesem Dialog kommt?

Ja also innerhalb dieser Unterrichtsreihe war es so, dass man (lacht) oft mit dem «Placemat» gearbeitet hat und viel mit dem Lerntempo arbeitete. Ähm und man hat vor allem Anhand von einem Beurteilungsraster ein Rubik gearbeitet. Das mache ich aber auch im sonstigen Unterricht, es ist also wie auch in allen anderen Fächern, aber grundsätzlich eine gemeinsame Basis, ein gemeinsamer Wortschatz hilft sicher, damit man merkt, wie man Fortschritte macht. Also dass man wirklich versucht, den Kinder anzuzeigen, dass sie vom Gleichen sprechen und auch das Gleiche meinen. Und

für das braucht es immer wieder Beispiele, also Lösungsbeispiele, welche ich zu einem Teil gemacht habe, teilweise habe ich sie auch von Kindern genommen und dann so quasi anonymisiert und dann haben wir über diese Beispiele auch im Klassenverbund mal geredet, wo schätzen wir diese ein, warum schätzen wie diese an diesem Ort ein, was ist gut gelungen was ist weniger gut gelungen? Einfach, dass dieses gleiche Verständnis von «Was ist welches Niveau» ein wenig verankert wird in den Köpfen.

Also, dass das Gleiche beurteilt wird ja.

Genau! Das man versucht, dass die Kinder, wenn sie das Gleiche sagen, auch das Gleiche meinen untereinander. Für das braucht es irgendwo eine Handhabung. Summativ würde das dann heissen also die Note 6 bedeutet dann ich muss von 30 Punkten, 30 Punkte haben.

Und so haben sie wirklich die Wahl.

Ja so haben wir es versucht, zumindest versuche ich es zu unterstützen oder, das war ja die Frage. Wie kann ich es unterstützen und das versuche ich so einerseits methodisch, also mit Gruppenarbeiten, kooperativ da findet immer ein Dialog statt. Lerntempo hat auch immer einen Dialog. Und dann eben trotzdem geführt von mir, dass ich versuche diese Fehler, also Fehler in Anführungs- und Schlusszeichen, aber diese Missverständnisse, die entstehen beim Reden mit dem Klassenverbund, versuche auszugleichen, dass sie wie realisieren «ah das ist eigentlich gemeint». Also was heisst ein knappes und verständliches Vorgehen, was ist das? Oder was ist ... ja beim korrekten Rechnen ist es klar es muss einfach stimmen aber ja was könnte ich mir noch für Fragen aufschreiben zu dem Sachverhalt, welcher jetzt vorliegt oder was könnte ich noch, wenn ich die Antwort schreiben, wie muss diese Antwort strukturiert sein? Also was unterscheidet denn eine Antwort vom Vorgehen, was ist denn da der Unterschied.

Ja, das haben sie schon zu einem Teil beantwortet, aber was ist ihnen denn wichtig beim Unterrichten von mathematischem Argumentieren.

Ja für mich unterscheidet es sich nicht viel von anderem Unterricht. Also ich habe jetzt nicht das Gefühl, dass wenn ich in diesem Bereich arbeite im Fach Mathematik, dass ich sage, da muss ich mich jetzt explizit auf etwas speziell achten, denn ich arbeite sonst auch viel so. Also mir ist es wichtig, dass die Kinder, egal was sie lernen, dass sie das kooperativ machen können. Also nicht nur natürlich, aber einfach, dass vieles in Dialogen stattfindet, dass sie lernen ihre Sachen auszudrücken, dass eine Methodenvielfalt vorhanden ist, also das es nicht immer das Gleiche ist. Das es mal homogen funktioniert, beispielsweise auf die Leistung. Mal heterogen, dass die Schwachen von den Stärkeren profitieren können. Ja … und dann versuche ich, von meiner Person aus, ich versuche als Coach zu agieren im Sinne von, ich stelle Fragen, die sie noch mehr zum Denken anregen sollen und die ihnen helfen sollen zu realisieren, was genau ihr Lernweg ist. Aber das ist nicht spezifisch aufs mathematische Argumentieren, sondern generell für den Unterricht.

Interview 10

Dann beginnen wir doch gleich mit der ersten Frage. Was ist mathematisches Argumentieren für dich, was sind Merkmale, was ist typisch?

SHP: Ich glaube wir haben das bis jetzt so umgesetzt in der Klasse, dass wir gesagt haben, schaut euch erstmal die Aufgabe an, was ist überhaupt in der Aufgabe enthalten, wie versteht ihr die Aufgabe. Und dieses Verständnis der Aufgabe ist je nach SuS auch sehr unterschiedlich. Manche haben gar keine Probleme damit, die Aufgabenstellung zu verstehen oder je nach Aufgabentyp auch. Und wir haben bei vielen Aufgaben doch bemerkt, dass, die Aufgabenstellung überhaupt zu verstehen, worum geht es überhaupt in der Aufgabe, für viele Schüler recht herausfordernd ist. Und dann haben wir gesagt, wir hätten gerne, dass sie versuchen, in einer Weise, entweder grafisch oder mit Bildern oder ähnlich, darzustellen, wenn es möglich ist, inwiefern auch, indem sie es mit … (nicht verstanden) kennzeichnen, wenn sie Tabellen machen, sie können auch Bilder malen, wenn es sinnvoll ist in der Mathe. Aber es sollte halt irgendwie einen mathematischen Bezug haben, wenn möglich. Und dass ist auch wieder je nach Schüler sehr verschieden, ob die schwächer sind, oder sehr stark sind, manche haben ein anderes Verständnis von Logik als andere. Wir haben auch einen Zettel ausgegeben, eine Übersicht über bestimmte mathematische Begriffe, zum Thema Merkmale, weil wir festgestellt haben, dass das das Hauptproblem ist. Und dann haben wir gesagt, sie sollen wirklich eine Rechnung nachstellen. Das fällt auch einigen, vor allem eher starken Schülern, eher schwer, zu sagen, wie habe ich das jetzt berechnet. Sie haben das Ergebnis aber wissen nicht, wie habe ich das jetzt berechnet. Wie stelle ich das jetzt dar, was ich berechnet habe? Sie sagen, ja das Ergebnis ist halt. Und wenn ich dann frage, ja wie seid ihr denn darauf gekommen, ihr müsst doch irgendwas gerechnet haben. «Ja, halt irgendwie.» Naja und das ist dann auch schwierig für manche wieder, manchmal auch für die Filterung, dann zu sagen, ich schreibe wirklich auf, was ich rechne und mach es nicht einfach nur …

Das was im Kopf genau vorgegangen ist.

SHP: Genau, im Kopf. Und dann die Begründung. Dann muss man sich halt auch an der Frage orientieren, muss aber vielleicht auch über die Frage hinausdenken. Und sie sind sich halt noch gewohnt, dass sie wirklich die Frage nochmals hinschreiben als Antwortsatz. Und dieses «Darüberhinaus-Denken», ich denke, das war oft auch für uns ein Problem, dass sie wirklich Schwierigkeiten hatten, zu sagen, es ist halt nicht nur der Antwortsatz umgeschrieben, sondern vielleicht auch nochmals ein oder zwei Sätze dazu., mit mathematischen Fachbegriffen, die sie in den Jahren eigentlich gelernt haben, die sie aber, wie wir öfters festgestellt haben, nicht so parat haben. Also Stellenwertsystem, Regelverständnis, Subtrahend, Minuend, was ist das? Was ist eine Differenz? Was ist eine Ziffer? Das sind alles so Begriffe, das fiel ihnen ungewöhnlich schwer. Wir haben also viel auch Begriffsarbeit geleistet. Und bis zum Ende haben wir festgestellt, dass sie unsicher sind, was ist

wirklich wichtig von der Aufgabe darzustellen und was ist ausschweifend. Am Anfang haben sie viel zu wenig gemacht und jetzt tendieren sie dazu, auszuschweifen. Starke Schüler schaffen es schon auf den Punkt. Die schaffen das. Aber umso schwächer der Schüler, umso mehr hat er das Gefühl, dass Quantität gleich Qualität ist. Und da haben wir jetzt auch ein bisschen daran zu arbeiten, zu sagen, konzentriert euch auf das, was relevant ist, auf das, was wichtig ist und nicht einfach nur viel schreiben, sondern auch, dass, was ihr schreibt muss Hand und Fuss haben.

Okay. Was ist für dich (LP) mathematisches Argumentieren?

LP: Das Argumentieren ist, wenn ich eine Lösung gefunden habe, zu wissen, wie ich darauf gekommen bin. Und da braucht es schon, wie meine Kollegin bereits gesagt hat, ganz viel Vokabular, was wie nochmals eine Sprache ist, nebst der deutschen Sprache. Und das mussten wir zuerst wiederaufarbeiten und ich finde, dass wir jetzt an einem ganz guten Punkt angekommen sind, bei dem sie Freude am Argumentieren haben, denke ich. Sie haben Freude…

Schön.

LP: Das Problem ist jetzt einfach, die Zeit reicht nicht aus für so viele Aufgaben. Und wie können wir sechse Aufgaben dann überhaupt bearbeiten mit Argumentieren. Als Aufgaben lösen, ja. Das sind wir uns gewohnt, da können wir auch noch mehr, aber, um sie zu argumentieren, das ganze auseinander zu nehmen, auseinander zu beineln, wie komme ich überhaupt dort hin, welche weiteren Möglichkeiten gibt es sonst noch, bei welchen es interessant wird, dieses Experimentieren, das fehlt eigentlich. Es ist schade, dass es jetzt schon wieder vorbei ist.

Okay, gut. Was ist so typisch im Unterricht, wenn du jetzt so vergleichst mit anderen Lektionen?

LP: Verhältnismässig zum normalen Unterricht, sage ich jetzt mal, kann man viel weniger Aufgaben lösen in derselben Zeit.

Okay, was natürlich mit diesem auseinander Beineln zu tun hat? Es Schritt für Schritt anschauen.

LP: Genau. Ich würde sagen, sonst löse ich locker zehn Aufgaben, wenn nicht mehr, und hier beschränken wir uns auf höchstens drei. Weiter sind wir einfach noch nicht gekommen. Und jetzt sehe ich auch die Problematik für die Prüfung, welche vielleicht etwa sechs bis zehn Aufgaben haben könnte. Und sie sind jetzt eigentlich mehr im Argumentieren drin als im Lösen.

Jawohl, okay.

LP: Ja.

Haben sie eine Lektion Zeit?

LP: Das weiss ich gar nicht. Ich glaube es ist eine Lektion. Ich habe sie noch gar nicht bekommen.

Ach so, die Prüfung ist auch im Programm drin?

LP: Ist sie im Programm drin? Ich habe jetzt nicht nachgeschaut, ich glaube, es ist eine Lektion.

Ja.

LP: Ich sehe einfach dort wirklich ein bisschen … Sie könnten es lösen, aber dadurch, dass sie die verschiedenen Schritte gerne richtig machen würden, und es gibt wirklich solche, die minutiös und präzise arbeiten und gerne den Level 4 erreichen möchten … Ich finde es schade, wenn wir einfach sagen, ihr könnt vielleicht drei Aufgaben aus dem Ganzen aussuchen und dann erreicht ihr es, aber das gibt ja keine genügende Note.

Da gibt es einen Klitsch.

LP: Ich habe mir gerade überlegt, ob ich sagen soll. «Löst es so, wie ihr das sonst jeweils gelöst habt, lasst das Argumentieren weg.» Das gäbe schlussendlich bestimmt mehr Punkte.

SHP: Ja, oder die Aufgaben zu reduzieren. Also wir haben ja wirklich festgestellt, dass sie sich besonders bemühen und dass man nachher zwischendrin auch mal ein *Bullseye lernen/landen muss* (nicht sicher, ob richtig verstanden). Wie ist das jetzt zu verstehen? Es gibt da mehrere Lösungsansätze, nicht nur einen. Jeder hat einfach 200 durch 2 gerechnet und fertig.

Ja.

SHP: Ja oder sagen wir mal 80 Prozent. Und dann muss man auch sagen, es geht auch über diese Aufgabe hinaus. Es steht da was anderes in der Aufgabe, lies diese nochmals durch. Und dann müssen sie es nochmals lesen, dann muss man es nochmals durchgehen. Und das, einfach dieses Verständnis zu erreichen, das braucht Zeit. Dass man nochmals mathematische Begriffe einfügen kann, welche fehlen, dass man nochmals Erklärungen abgeben kann, das muss in den 45 Minuten auch als Reserve irgendwo miteingeplant werden. Nicht jedem ist klar, dass Summand plus Summand gleich Summe ist. Das haben sie vielleicht mal irgendwann gelernt und dann vergessen und nie wieder gebraucht. Das sind so mathematische Begriffe, die man als Mathematiklehrer sicherlich parat hat, aber nicht jeder, den man auf der Strasse antrifft, weiss, wie das konkret dann heisst. Das sind so Sachen, die muss man dann wieder repetieren. Oder Stellenwertsystem. Sie haben ja Stellenwertsystem geübt bis zum Verbrechen, aber das, was so mit dem Stellenwert zu tun hat, das sind so Schwierigkeiten…

LP: Das Argumentieren geht halt extrem in die Tiefe, ins «Alles Wissen» und nicht nur einfach ins «Resultate finden». Und das ist das, was es definitiv ausmacht. Argumentieren ist wie eine Diskussion. Man hat eine Diskussion über das Thema. Ja gut, man beginnt mal, aber es hat halt niemand Recht und es ist «open end» und auch hier, das Argumentieren könnte man dann, wenn es einmal spannend wird, wenn die Kinder einmal raushaben, wie es geht, und das haben die Kinder jetzt, dann könnte man eben eigentlich noch viel mehr, man könnte mit einer Aufgabe eine ganze Lektion füllen.

Kann man eine ganze Lektion füllen.

LP: Effektiv.

SHP: Es ging auch wirklich darum, dass wir festgestellt haben, dass die Kinder sehr bemüht sind, an manchen Stellen zu bemüht und sie wissen nicht, es kommt mir manchmal so vor, was erwartet der Lehrer. Was ist jetzt richtig? Was ist in Hinsicht auf den Test dann? Und dann werden sie natürlich ausführlich. Dann könnte ja irgendwo der richtige Begriff drinstehen, irgendwo die richtige Antwort dabei sein. Und dann holen sie zu stark aus, anstelle zwei Sätze zu schreiben, welche aber so konkret sind, dass es auch passt. Und das ist glaub die Schwierigkeit bei den Schülern, besonders wie gesagt, bei den schwächeren Schülern, zu sagen, ich schreibe jetzt zwei oder drei Sätze und die sind mathematisch einfach fundamental und das reicht dann.

Ja.

SHP: Anstelle, dass ich noch zehn Sätze dazu schreibe, weil vielleicht noch ein Wort drin sein könnte, welches dem Lehrer so gefällt. Und das ist, das «auf den Punkt bringen», das ist, glaube ich, für die Schüler das Schwierigste, zu sagen, das, das, das und das ist es dann auch.

das Wesentliche

SHP: Genau, wirklich die konkrete Aussage zu erkennen und nicht, das Ganze auszuschmücken wie einen Aufsatz.

Okay.

SHP: Und das ist glaub beim Begründen der Schüler wirklich der schwierigste Aspekt gewesen, das «Was ist wichtig? Was ist mathematisch relevant? Was ist für diese Aufgabe wirklich die Kernaussage und was ist nur Beilage?»

Ja. Okay. Super. Wir gehen einmal eine Frage weiter. Und zwar, das haben wir eigentlich auch schon abgedeckt, das passt so, was typisch ist im Unterricht. Vielleicht noch diese letzte Frage zum mathematischen Argumentieren. Vielleicht noch so wie von eurer Seite: Was ist euch wichtig? Worauf legt ihr Wert in einer Lektion?

SHP: Ich glaube das haben wir schon am Anfang gesagt: Das Verständnis der Aufgabenstellung. Möglichst darstellen können, eventuell mit Beispielen oder Tabellen oder mit Übersichten und dann die Aufgabe wirklich konkret zu formulieren, nicht nur das Ergebnis hinschreiben und dann wirklich eine gute Argumentation finden, die nicht lang ist, aber qualitativ hochwertig.

LP: Mir ist einfach wichtig, dass man auch ein Zeitfenster hat, welches einem soviel wert ist, dass man einen Sinn sieht, dass wenn man eine Aufgabe diskutiert, argumentiert, auseinander beinelt, dass irgendjemand, jeder oder irgendein Kind, nein eigentlich alle Kinder einen Nutzen davontragen. Und das ist wirklich erst möglich, wenn man in die auch Tiefe geht. Und es braucht, wie wir es hier

jetzt haben, jetzt ist es die neunte Lektion oder, also eigentlich ist war es die Lektion zehn gewesen, aber das sind neun Lektionen, bei denen wir daran gearbeitet haben und erst jetzt sieht man eigentlich so ein bisschen, dass sie begriffen haben, worum es geht. Weil in der «Schulstube» sind wir eigentlich schon daran, dass wir jede Woche ein neues Thema behandelt haben sollten. Dann, wo können wir welche Aufgaben überhaupt empfehlen? Wir lösen einfach oberflächlich zu einem Thema etwas und dann geht es weiter zum Nächsten. Das Ziel ist es, dann einmal eine genügende Note bei den Prüfungen zu haben und möglichst viele Aufgaben gelöst zu haben. Das wäre Übungszeit. Und das Argumentieren, wirklich in die Tiefe zu gehen, ich finde es eigentlich, darum habe ich jetzt zum zweiten Mal mitgemacht und es war noch eine wertvolle Zeit für mich. Muss ich sagen. Ich hatte aber auch schon meine Zweifel, ganz ehrlich, ich musste sogar auch schon abbrechen. Weil einfach der Druck in der «Schulstube» so gross ist mit dem Lehrmittel, wir sollten vorwärts machen. Wir können gar nicht von allen Themen, die wir haben, alle durchnehmen. Wir müssen das so genau planen und das war jetzt doch eine Lektion verteilt über diese zweieinhalb Monate. Und noch zusammengefasst: Es war mir wichtig, das einmal anzuschauen. Ich habe es geschätzt, hier gestärkt zu sein, durch die PHSG und es ist halt einfach das Vokabular, welches sie brauchen. Was ist eine Wertetabelle? Was ist der Unterschied zwischen Zahlen und Ziffern? Aber das ist ja genau das: Wenn wir etwas Neues einführen, dann ist es auch so, dass wir etwas erklären, aber was genau beim Gegenüber angekommen ist, das wissen wir manchmal nicht. Wir wissen einfach, dass das Resultat richtig kommt und der Lösungsweg ist auch in Etwa der vorgezeigte.

Die Abschlussfrage: Fällt euch noch etwas ein? Sei dies zum Thema Feedback, zum mathematischen Argumentieren?

SHP: Nein, aber zum Ablauf hier. Wie gesagt, es sind sehr viele Aufgaben und es ist schwierig, so viele Aufgaben in so kurzer Zeit zu lösen. Zumindest für diese Schüler. Ich weiss jetzt nicht, wie es in anderen Schulhäusern rausgekommen ist, das kann ich natürlich nicht vergleichen, aber vielleicht auch ein Zeitfenster mal dalassen für eine Einführung mathematischer Begriffe, für die Klärung von Inhalten, nochmal den Aufgabenaspekt, nochmal genau die Aufgabenstellung anschauen, nochmal genau durchlesen, wenn es da Unklarheiten gibt. Dass man da nicht zu viel macht, sondern eher weniger, aber dafür dann qualitativ möglichst hochwertig und wirklich, dass es «rein geht».

Ja.

SHP: Also aus SHP (Schulische Heilpädagogin) -Seite ist das Weniger mehr.

LP: Der Unterschied zu dem Projekt vor vier Jahren ist, dass ich jetzt ja doppelspurig gefahren bin mit der Unterstützung der SHP. Man hatte mehr Zeit für die Kinder, mehr Zeit haben heisst auch, man kann noch tiefer gehen. Und weil wir jetzt noch tiefer gegangen sind, habe ich nun wirklich etwas Respekt davor, dass die Schüler nicht vorwärts arbeiten, sondern dass wirklich bei einer Auf-

gabe hin und her diskutieren, experimentieren und argumentieren und wie gesagt, eine Argumentation, die hat, ja … nicht gerade immer einen Schluss. Es ist wirklich open-ended und solche Sachen, das ist ein bisschen die Schwierigkeit mit dieser Prüfung und diesem Zeitfenster. Eigentlich sollte man sagen können, ihr habt solange Zeit, bis ihr das Gefühl habt, jetzt seid ihr soweit, dass ihr nicht mehr mehr schreiben könntet.

Ja. Und dann würde eigentlich eine Aufgabe reichen. Und dann können sie bei dieser Aufgabe so weit kommen, wie sie können. Oder müsste man doch mehrere Aufgaben haben, falls sie bei einer jetzt nicht so viel schreiben können oder …?

LP: Man könnte sicher, sag ich jetzt mal, sechs verschiedene Typen anschauen, aber einfach nicht in 40 Minuten musst du fertig sein.

Ja. Den Zeitraum einfach verlängern.

LP: Ja, den Zeitraum verlängern. Ja ich denke, das…

SHP: Oder auch aufsplitten. Dass man sagt, drei verschiedene Aufgabentypen in der einen Lektion, drei in der nächsten, dass man das einfach ein bisschen…oder einfach zwei … bietet, wo man dann sagen kann, die Klasse ist sehr stark oder diese Klasse ist jetzt nicht sehr stark und dann kann man ausprobieren und dann sagen, wir gehen jetzt auf diesem Niveau weiter. Wir haben ja auch 5. Klässler hier, das darf man nicht vergessen, die sind gerade aus der 4. gekommen und es sind nicht alle zukünftige Maturaschüler, es gibt auch einige, die einmal eine Real machen werden und dann ist das für sie ziemlich herausfordernd, wenn sie zuvor Aufgaben hatten, bei denen sie Rechnungen machen mussten mit nur einem Antwortsatz, dann gleich diese Ausführlichkeit. Es gibt aber auch manche hier, die sind gut gestellt mit den Aufgaben, die kommen damit gut zurecht, das darf man auch nicht unterschätzen. Dann wären so zwei Aufgabentypen, dass man sagt, wir entscheiden uns für die Klasse oder wir entscheiden uns jeweils in jeder Gruppe.

LP: Last but not least würde ich noch anfügen, dass es eigentlich noch ganz interessant wäre, mündlich Prüfungen abzunehmen in diesem Punkt anstatt alles schriftlich. Weil man auch im Gespräch viel mehr rausholen könnte. Die Hinderung ist ja meistens beim Argumentieren, wie fasse ich dies in Worte.

SHP: Es wäre sicherlich interessant, wenn man beides vielleicht sogar kombiniert oder man sagen würde, eine Aufgabe schriftlich, eine mündlich. Wie würdest du das präsentieren, das wäre vielleicht auch im Unterricht interessant, einmal zu sagen, jeder Schüler darf in jeder Lektion auch anfangen, vielleicht mal zwei Schüler eine Aufgabe mal vorstellen, die sie zu Hause vorbereiten. Was haben sie sich für Gedanken gemacht? Wie haben sie das umgesetzt? Weil wenn du 20 Schüler hast und du machst 20 Leute, dann schlafen ja alle ein. Das waren jetzt bloss Ideen.

Ja das ist gut, danke.

Interview 11

Gut, zuerst beginnen wir mit dem mathematischen Argumentieren. Ganz allgemein für dich, was ist mathematisches Argumentieren? Wie würdest du das ein bisschen definieren? Was sind so ein bisschen Merkmale? Was ist typisch? Generell.

Mathematisches Argumentieren ist für mich in einer Aufgabe die Verbindung zu machen, zwischen, dem, was ich studiere und dem, was ich aufschreibe.

Ja?

Weil alle Gedankengänge in einer Aufgabe kann man sich meistens nicht notieren, aber es ist wichtig, dass man versucht, Lösungen zu finden und diese nachher sich versucht, selbst zu erklären und Gründe sucht, warum das Ergebnis, welches ich herausgefunden habe, stimmt.

Mhm.

Ja.

Mhm.

Und sich auch nicht zufriedengeben mit «ja oder nein» und mit «stimmt oder stimmt nicht», sondern wirklich weiter gehen und sagen, «es stimmt, weil».

Ja.

Weil ich das und das rechne und sich auseinandersetzen mit den eigenen mathematischen Vorstellungen,

Mhm.

Die man hat. Und, und, ja. Und das, die Schwierigkeit für die Kinder ist wirklich, zu merken, was sie im Kopf studieren. Also weisst du, was passiert im Kopf, was geht ab in mir drin. Und das aufzuschreiben, ist extrem schwierig.

Ja, dass sie das formulieren können.

Nicht nur für die Kinder. Ja genau formulieren.

Ja.

Und dort ist wahrscheinlich, das hat man auch jetzt gesehen vorhin in der Lektion, und sie wissen es auch selbst, das ist wirklich einfach vom Sprachlichen her auch schwierig,

Mhm.

Zu argumentieren. Man muss die richtigen Worte treffen können. Und mit der Mathematik zusammen noch mathematische Begriffe können. Es reicht nicht, wenn ich sage, «ich nehme von einer Zahl einfach immer die Vorderste. Denn der Nächste versteht wieder etwas Anderes, wenn du das so sagst.

Aber wenn du sagst, ich nehme von dieser Zahl immer die Zehnerziffer, oder die Zehnerstelle, dann ist es klar definiert und ...

Ja.

Und sobald es dort unpräzise wird, und es wird in der Mathematik unglaublich schnell unpräzise, kommt man so ein bisschen in einen Erklärungs-Notstand und dann weiss der Nächste schon wieder nicht mehr, wie das gemeint ist.

Ja genau.

Da wirklich präzise zu sein, und das ist ein Challenge.

Ja.

Immer wieder.

Okay.

Ja, das ist vielleicht auch typisch für die Mathematik, obwohl es ja in der Mathematik immer die richtige, oder nur eine richtige Lösung gibt, das zu begründen ist vielleicht typisch mathematisch gar nicht so einfach.

Ja.

Und ja.

Okay. Gut. Was würdest du sagen, ist typisch am Unterricht des mathematischen Argumentierens? Wenn du jetzt einmal ein bisschen vergleichst, mit einer anderen Lektion, die Schüler so ein bisschen beobachtest, oder auch, was du anders machst? Gibt es etwas, was du sagst, doch das ist so typisch in diesen Lektionen?

Ja, also vom Ablauf her finde ich, habe ich es jetzt immer etwas ähnlich gemacht wie gerade eben. Also man muss darüber reden und ...

Ja?

Und nachher gibt es aber sehr intensive, sehr intensive Momente, in denen die Kinder für sich selbst dran sind, immer.

Ja.

Und ich glaube auch, das, was nachher wieder stattfindet, mit dem Feedback geben und mit sich gegenseitig Rückmeldung zu machen, ist aber auch wichtig. Ich glaube, wenn da jeder für sich argumentieren würde, da kommt man wie, also weisst du, das ist wie zu wenig.

Mhm.

Es braucht diese Kommunikation, glaube ich. Und sonst, ich glaube für die Kinder ist es vielleicht nice to have, wenn sie wissen, wie ich jetzt, wenn sie jetzt zum Beispiel in diesem Aufgabenheft dran sind und ich ihnen dieses korrigiere und sage, ja da hast du alles richtig, hier hast du noch einen Fehler, korrigiere nochmals, das finden die Kinder sicher auch gut auf eine Art, aber sie sind dann wie nicht so darauf angewiesen.

Mhm.

Und jetzt bei diesen Aufgaben finde ich, da nimmt es die Kinder viel mehr Wunder, ob sie jetzt wirklich auf dem richtigen Weg sind. Und sie kommen viel mehr vorbei, um Fragen zu stellen und sie fragen mich, «Sie, stimmt das? Ist das so richtig?»

Ja.

Ich glaube die Kommunikation ist ganz entscheidend hier, bei diesen «Argumentieren Aufgaben». Und das ist mir jetzt sonst weniger, es gibt schon Themen, bei welchen das auch im Vordergrund steht, aber meistens, wenn es ums Rechnen geht, dann ist das nicht, klar du erklärst es und, aber ich gehe jetzt selten hin und sage «Ja, jetzt diskutiert noch über diese Aufgabe fünf Minuten.»

Mhm.

Mach ich eher selten. Das macht man jetzt wirklich beim Argumentieren so, wo es einfach wichtig ist, dass sie auch mal sehen, hei was macht denn der andere.

Mhm.

Ja, so über die Grenzen schauen und sich fragen, «Können wir das überhaupt vergleichen, was wir gemacht haben?» Ich glaube das ist anders. Ja.

Okay.

Also, es findet einfach mehr Kommunikation statt.

Gut. Du hast meine nächste Frage bereits schon ein bisschen angesprochen. Was ist dir wichtig beim Unterrichten von mathematischem Argumentieren. Vielleicht auch von dir selbst noch, was möchtest du erreichen, was ist so das Ziel?

Das Ideale …, das Ideale wäre, dass ich den Kindern nicht zu viel vorwegnehme von ihren Überlegungen.

Ja.

Oder sie zu viel beeinflusse. Um wirklich zu versuchen, sie den Weg selbst finden zu lassen.

Mhm.

Aber, das ist ja die Idealvorstellung. Ich glaube, manche Kinder, eine Situation gab es ja vorhin glaub auch, welche du auf deinem Video hast, wo ich merke, das Kind sucht wie die Bestätigung für einen Weg.

Mhm.

Und ohne diese Bestätigung würde es einfach ganz lange gehen, glaube ich, manchmal.

Ja.

Also weisst du, vielleicht würde es dann fast ein wenig verzweifeln du dann braucht es wie so ein bisschen eine …, eine Begleitung.

Mhm.

Aber diese möglichst reduziert, einfach so, dass du nicht die Kinder zu etwas hinführst, sondern sie mehr selbst dahin kommen.

Mhm. Dass sie selbst einen Weg finden.

Ja. Das ist aber ganz schwierig finde ich.

Ja.

Als Lehrperson ist das, wenn du dir selbst, du bist immer einen Schritt voraus und hast jeweils, diese Probleme und so, die es jeweils gibt, und dann bist du manchmal so voreilig und dann sagst du, «Schau, wie wäre es jetzt, wenn du das so machst und hier, versuch doch mal.», und sie aber selbst hineinlaufen lassen und sagen, ach, die sollen das jetzt so lange machen, bis es, bis es dann automatisch kommt, und.

Ja.

Das ist die Schwierigkeit. Und ich finde das aber einen entscheidenden Punkt für die Lehrperson, dass sie sich zurücknimmt und (macht Pause).

Mhm.

Und die Schüler so gut es geht, machen lässt.

Ja, okay.

Ja, ohne viel zu beeinflussen.

Mhm. Gut. … Okay.

Sie sollten ja eigentlich dann im Stande sein, mit diesem Ablauf vom Feedback geben, dass wenn sie danach ein Feedback erhalten oder jemandem eines geben, dass sie dann eigentlich automatisch, ähm, diese drei Punkte, eben vom Lösungsweg und von der Lösung und vom Begründen eben selbst

merken, was jetzt gut war und was nicht, damit du gar nicht viel Einfluss nehmen musst, und (macht Pause).

Mhm. Um das ein bisschen zu verselbständigen bei den Schülern.

Ja.

Interview 12

Also die erste Frage ist eigentlich so: Was ist für dich mathematisches Argumentieren? Was sind so Merkmale vom mathematischen Argumentieren?

Also ich denke zum mathematischen Argumentieren gehört sicher dazu, dass man den Wortschatz dazu auch hat, dass die Kinder wissen, was eine Summe ist, was multiplizieren ist, dann geht es einem viel leichter. Darüber sprechen, wie man etwas ausrechnet oder warum man etwas so ausrechnet. Meine Fragen sind dann immer: Warum? oder Wieso? Und wichtig, was wir auch mit den Kindern jetzt erlebt haben, ist einfach, dass sie die Begriffe, eine gewisse Kenntnis über die mathematischen Begriffe brauchen sie einfach, dass man sie auch versteht.

Gut, danke. Dann, die nächste Frage ist: Was ist typisch im Unterricht, wenn mathematisches Argumentieren stattfindet?

Also es gibt in diesem Sinne, das Wichtigste ist nicht das Resultat oder die Lösung, sondern das Wichtigste ist eigentlich der Weg. Wie komme ich zu diesem Resultat. Und wichtig finde ich auch, dass sie aufeinander eingehen, wenn jemand was sagt, dass dies von den Mitschülern aufgenommen wird und man darauf eingeht. Ich sage auch vielmals, es ist wie weiterstricken bei einem Pullover oder sowas. Dass man etwas weiterentwickelt. Oder verschiedene Ideen nachvollziehen können, auch wenn es einmal ein Irrweg ist. Diesen kann man dann einfach so stehen lassen und dies auch begründen: «Nein, das führt nicht zum Ziel aus diesem und jenem Grund.» Vielmals haben wir auch zu den Schülern gesagt: «Das Wichtigste ist nicht, dass am Schluss 700 rauskommt, die Lösung, sondern viel wichtiger ist der Weg, wie kommen wir darauf.

Dorthin eigentlich. Und vielleicht jetzt auch nochmals typisch wie für den Unterricht, die Unterrichtsformen. Wenn ihr jetzt das durchgeführt habt, dieses mathematische Argumentieren, was macht dann den Unterricht aus? Wie muss der Unterricht gestaltet sein, dass man mathematisches Argumentieren durchführen kann?

Ich denke, es braucht am Anfang vielleicht eine Einführung in eine gewisse Aufgabe. Wir haben ihnen gewisse Grundbegriffe erklärt oder auch nochmals wiederholt, wie man so etwas überhaupt berechnen kann. Daraufhin gibt es natürlich andere soziale Unterrichtsformen, wie Partnerarbeit oder Gruppenarbeit oder zuerst Einzelarbeit und dann wird in Partnerarbeit diskutiert. Also die Unterrichtsform ist offener. Es kann kein Frontalunterricht in diesem Sinne sein. Oder auch von uns Lehrpersonen, wir sind viel zirkuliert von Gruppe zu Gruppe, haben wieder Anstösse gegeben, mit den

Kindern diskutiert, ihnen weitergeholfen. Vielmals «ich versteh es nicht, ich versteh es nicht» und dann ging natürlich nichts mehr. Dann mussten wir natürlich Inputs geben, wieviel sage ich jetzt, aber sodass es weiterlaufen kann.

Wenn jetzt ihr, oder wenn du im Unterricht mathematisches Argumentieren durchführst, was ist dir wichtig bei dieser Art von Unterricht?

Also wichtig finde ich auch, ist die Aufgabe an erster Stelle. Es muss eine Aufgabe sein, welche das auch anregt. Und dann muss die Aufgabe so gestaltet sein, dass das Niveau stimmt für die Schüler, dass sie auch einen Weg dazu finden. Dann ist es wichtig, dass wir Sozialformen dazu organisiert. In dieser Klasse ist das Soziale sehr wichtig, dass wir eigentlich steuern, wer mit wem zusammenarbeitet, dass überhaupt ein Miteinander und ein Diskutieren über den Unterrichtsgegenstand stattfinden kann. Und das war jetzt auch eine grosse Entwicklung, oder wir sind immer noch dran, dass es nicht nur heisst, «richtig» oder «falsch» oder «ich habe recht» oder «du hast recht» und dazwischen gibt es nichts. Das ist eine sehr grosse Herausforderung, dass man überhaupt zum Argumentiere, Diskutieren und zum «Darüberreden» kommt.

Interview 13

Gut, meine erste Frage wäre: Was ist für dich mathematisches Argumentieren? Was sind für dich die Merkmale davon, was ist für dich typisch vom mathematischen Argumentieren?

Dass ich quasi sagen kann, egal welche Zahl ich nehme, dass ich sagen kann, dass macht Sinn für mich, weil es so ist. Also, ich begründe eine Zahl nicht nur mathematisch, sondern auch schriftlich oder mündlich- also mit Worten.

Wenn du das vergleichst mit normaler Mathematik, dann ist dies für dich der Unterschied?

Ja, bei normaler Mathematik geht es ja um Automatisierung, schneller werden, Fehler vermeiden und zum Teil, effizient zu arbeiten. Bei dem Argumentieren und Begründen kommt die sprachliche Komponente noch dazu.

Wenn wir jetzt den Mathematikunterrichten anschauen, wenn du mathematisch argumentierst, was ist da im Unterricht für dich typisch? Also die Umsetzung des mathematischen argumentieren. Ist da etwas anders als bei normaler Mathematik?

Nein, es ist fest anders, weil Fragen und Antworten extrem auf der sprachlichen Ebene sind. Das macht es für einige leichter, wenn sie sprachlich begabt sind. Für viele macht es dies jedoch schwieriger, weil sie die Aufgabenstellung kaum verstehen. Ich versuche immer, von der Aufgabe zu der Rechnung zu kommen. Dann geht's. Aber der Schritt von Text zu Rechnung ist extrem schwierig.

Methodisch/didaktisch hat dies Veränderungen für dich zur Folge im Gegensatz zum normalen Mathematikunterricht?

Ja, meine Kollegin und ich sind sehr viel präsenter. Die SuS können sehr viel mehr Fragen kommen. Normalerweise rechnen sie einfach, da fragt fast niemand nach. Sie kommen mehr, um zu schauen, wo ihr Fehler lag, wenn wir es korrigiert haben.

Das hat zur Folge, wie du gesagt hast, dass ihr nur noch Lektionen macht, in welchen ihr beide da seid, um diese Fragen beantworten zu können.

Ja, so können wir das besser auffangen, weil es so Gruppierungen gibt. Die einen verstehen die Aufgabe nicht mal. Und jetzt, wie kommst du von der Aufgabe zur Rechnung. Weil wenn sie die Rechnung haben, dann geht es. Da gibt's dann vielleicht ein paar Rechnungsfehler oder Überlegungsfehler. Aber sobald sie die Rechnung haben, dann geht es automatisch. Die Schwierigkeit ist es, die Aufgabe zu verstehen, um was geht es. Das hast du im normalen Mathematikunterricht nicht. Da hast du einfach die Rechnung.

Gut. Das hast du begonnen, was sind Tipps. Ist das etwas, was du denkst ist essenziell, das würdest du bei anderen Mathematiklektionen auch machen?

Also so ein Abholen oder so ein Einstieg mach ich immer, aber dann ist dies vielleicht eine Schlangenrechnung oder Kopfrechnung oder nochmals eine kleine Repetition in Gruppen, wo stehen wir. Jetzt in diesem besonderen Fall, ist es häufig vorgekommen, dass sie mir zurückgemeldet haben, wenn sie es gemacht haben, dass sie es nicht verstanden haben. Dann haben wir die Aufgabe gemeinsam laut gelesen, dann haben sie es plötzlich verstanden. Also, wenn sie es wie nochmals gehört haben, von jemand anderem oder von sich selbst laut, dann haben sie es, wie besser begriffen. Das ist jetzt aus diesem Grund entstanden, wir müssen nochmals schauen, wie gehst du auf eine Aufgabe hin, damit du es besser verstehst. Das du nicht vor dem Blatt sitzt und denkst, ich verstehe nichts.

Was ist dir besonders wichtig, beim Unterrichten von Mathematischem Argumentieren?

Mir ist wichtig, und ich habe auch noch einige Beispiele mitgebracht, mir ist wichtig, dass sie die Aufgabe verstehen. Manchmal ist es ihnen zu wenig präzise und manchmal ist es ihnen zu präzise oder mit Worten beschrieben, dass sie es nicht verstanden haben. Dann haben wir zum Teil fächerübergreifenden Unterricht gemacht, das war dann auch Deutschunterricht. Es wurden Fragen gestellt wie, weisst du was ein Kuchenrezept ist, oder was gemahlene Nüsse sind. Dann haben sie einen Bezug dazu. Es ist nicht nur reine Mathe. Es geht in ihren Alltag, es geht ins Deutsch oder Sprachverständnis allgemein.

Interview 14

Die erste Frage ist: Was ist für dich mathematisches Argumentieren?

Hm. Also das eine ist, die mathematischen Begriffe verwenden, was ich sehr schwierig finde zum Teil für die SuS. Weil sie auch Subtraktion nachschauen, was das ist. Das haben sie relativ wenig

gebraucht. Vor allem die mathematischen Begriffe verwenden und etwas so erklären, dass es andere nachvollziehbar ist.

Was ist typisch, wenn ihr mathematisch argumentiert im Unterricht? Was unterscheidet dieser Unterricht vom herkömmlichen Matheunterricht?

(lange Pause). Es geht wirklich darum, eine Aufgabe zu verstehen und zu erklären. Was ich mit dieser Aufgabe mache, was ich herausfinde. Nicht einfach nur eine Rechnung aufzuschreiben.

Was müssen die Kinder machen in diesem Unterricht?

Sie müssen selbst herausfinden. Sie müssen eigentlich ein Rätsel lösen, weil die Aufgabe für sie als Rätsel daherkommt, in welcher es mehrere Möglichkeiten gibt und nicht nur eine Antwort.

Was ist dir wichtig gewesen, wenn du mathematisches Argumentieren gemacht hast?

Mir ist wichtig, dass sie sehen, dass es ganz viele Aufgaben gibt im Leben, welche offen sind. Und nicht, dass es eine Rechnung ist, ich schreibe das Resultat hin und dann ist es gut. Sondern es sind, auch das was dann im Berufsleben kommt. Aufgaben, bei welchen es mehrere Optionen gibt und verschiedene Vorgehensweisen gibt.

Interview 15

Ähm also als Einstieg hätte ich eine theoretische Frage an dich. Und zwar geht es darum was mathematisches Argumentieren bedeutet und was die Merkmale des mathematischen Argumentierens sind.

Mhm. Also es geht darum, dass man wie erklären kann, wieso diese Lösung stimmt. Und die Merkmale sind, dass man es gut begründet, also dass es nachvollziehbar ist, dass man ähm es vielleicht mit Zeichnungen aufzeigen kann oder klare Systeme dahinter erkennen kann. Und ja genau.

Okay. Hast du gerade ein Beispiel, wo zum Beispiel sagen kannst ja letzte Woche da …

Ja beispielsweise das mit der Glace ist mir so geblieben, als dann gewisse Kinder begonnen haben zu zeichnen, oder beschrieben haben mit Weil-Sätzen, darum ist es so und so und dann auch begonnen haben zu diskutieren. Eben die einen hatten diese Lösung, die anderen diese und sie konnten so wie erklären weshalb ihr Lösungsweg stimmt. Das habe ich noch spannend gefunden.

Okay. Ähm die nächste Frage wäre was denn typisch ist im Unterricht, wenn mathematisches Argumentieren stattfindet. Also ähm vielleicht auch was es braucht, damit mathematisches Argumentieren überhaupt stattfinden kann, also was es auslöst.

Also sicher irgendeine Konfrontationsaufgabe. Ähm und was halt auch wichtig ist finde ich ist, dass sie die Begriffe kennen oder verstehen. Manchmal muss man die vorher einführen, damit sie anschliessend überhaupt argumentieren können. (lacht)

Und ähm also was verstehst du unter einer Konfrontationsaufgabe?

Ja also zum Beispiel irgendetwas wie ein Jogurt kostet so und so viel, diese kosten so viel. Er sagt das stimmt. Und dann muss man ja wie sagen können, ja es stimmt nicht oder es stimmt und dann haben sie wie ein Problem und das wollen sie lösen.

Mhm, okay. Und was sind das für Begriffe? Du hast Begriffe angesprochen, die dir wichtig sind, dass diese gebraucht werden.

Ja also zum Beispiel Multiplizieren oder ähm, ich weiss jetzt gar nicht mehr was sonst so angefallen ist. Begründen haben sie zu Beginn auch nicht so verstanden was sie mit dem jetzt machen müssen. Also es waren ein paar Begriffe. Ja halt eben so mathematische Fachbegriffe wie Addieren, zusammenzählen, oder was war da noch. Ja. (lacht)

Kein Problem. Was ist dir persönlich denn wichtig, wenn du mathematisches Argumentieren unterrichtest?

Ja, dass die Kinder die Freude nicht verlieren, dadurch, dass sie es vielleicht nicht gleich können. Ja es war mir auch immer wieder wichtig, dass Stärkere anderen Kindern auch helfen und aufzeigen, wie sie das gelöst haben. Weil, manchmal wenn ich es erkläre verstehen sie meinen Weg nicht. Da passt vielleicht ein Weg von einem anderen Kind der ein bisschen anders ist besser. Und dann können sie wie aus dieser Situation heraus die nächste Situation anders angehen. Also zum Beispiel am Anfang haben sie bei mir überhaupt nicht verstanden, wie sie an diese Aufgaben herangehen sollen. Und jetzt fangen sie an Dinge anzustreichen manchmal, und dann danach aufzuzeichnen was sie gemeint haben oder haben beim Lösen ein System dahinter. Ich denke das ist sicher noch wichtig.

Und wenn jetzt ein Kind findet, ja das ist jetzt einfach so, wie leitest du dieses Kind an, damit es dann auch mit dem Argumentieren beginnt?

Mhm. Dann habe ich es auch schon so gemacht, dass sie zu zweit zusammen gehen müssen und wie sagen müssen meine Lösung stimmt und deine nicht und dann gegenseitig sagen müssen, doch meine Lösung stimmt, weil. Und das haben sie meistens noch cool gefunden, weil sie gemerkt haben, dass es Sinn macht, wenn sie es jemandem erklären müssen.

Also vor allem mit Tandems?

Mhm, genau.

Interview 16

Ja, genau. Und deshalb ist die erste Frage eigentlich gerade so: Was ist mathematisches Argumentieren für dich? Was sind so ein bisschen Merkmale? Was ist typisch? Gerade, was dir so einfällt.

Also das ist ja auch auf der Planung gestanden. Haltet alle Merkmale fest. Und trotzdem diese Merkmale hatte man nirgends gehabt. Was sind jetzt diese Merkmale? Das war ein Herausfinden. Das genaue Beschreiben eines Resultats. Man hat in der Mathematik häufig die Tendenz, einfach das Resultat hinzuschreiben =, ohne Lösungsweg oder ohne Worte. Also diese ganzen Überlegungen im Kopf noch auf das Blatt zu bringen. Typisch ist, dass die SuS das nicht wollen, sie sind sich nicht daran gewöhnt. Wieso sollen sie das noch erklären, wenn sie ja das richtige Resultat haben? Ich finde das eben wichtig, dass man das auch in der Mathematik behandelt und nicht nur in den Sprachen.

Super. Was ist typisch im Unterricht beim mathematischen Argumentieren?

Der grosse Unterschied ist, dass sie beim mathematischen Argumentieren viel mehr reden. Heute haben sie auch lange allein gearbeitet. Normalerweise stelle ich die Uhr auf 5 Minuten auf Einzelarbeit, danach arbeiten sie gemeinsam. Es ist einfach spannender sich auszutauschen und sie kommen besser ins Argumentieren rein, als wenn sie allein vor dem Blatt sitzen.

Du stellst die Uhr auf 5 Minuten und danach arbeiten sie in Gruppen oder zu zweit?

Ja genau. Das andere typische ist das Überwinden, dass man jetzt alles aufschreiben soll. Das ist jetzt über die letzten paar Wochen sehr viel besser geworden.

Was ist dir wichtig beim Unterrichten beim mathematischen Argumentieren? Damit es dann klappt?

Die Organisation, also wann müssen wir was machen, und wo hin. Es muss viel mehr Struktur gegeben sein. Wo schreibt ihr euch ein, wenn ihr fertig seid. Wann besprechen wir.

Das mit den Kärtchen?

Ja, das muss sicher mehr gegeben sein. Wichtig ist, dass sie auch über ihre Lösungswege nachdenken. Dass die SuS in den Prozess reinkommen, was auch im LP21 ein wichtiger Teilbereich ist.

Interview 17

Was ist mathematisches Argumentieren, was sind Merkmale? Ganz allgemein.

Ja, das musste ich mir in letzter Zeit auch mehrmals überlegen, respektive auch, dass es bei den Kindern ankommt, was ich will oder was vielleicht auch das FEMAR will und ich finde vor allem wichtig, dass man, wenn man eine Aufgabe, eine mathematische Aufgabe hat, dass man sie auch mit mathematischen Begriffen erklären kann, dass man das Vorgehen erklären kann. Das stand vor allem in Zentrum, fand ich. Das ist für mich mathematisches Argumentieren. Also: Begrifflichkeiten müssen stimmen und das Vorgehen muss begründet werden können, wenn ich eine Aufgabe löse.

Was ist bei dir selbst im Unterricht typisch, wenn mathematisches Argumentieren stattfindet?

Ich versuche, ihnen so einen gewissen Aufbau möglichst mitzugeben. Das heisst, dass sie sich gerade bei Textaufgaben, wie wir sie hatten bei den Beispielen oder auch bei anderen Aufgaben immer wirklich die drei Schritte, ich nenne sie, glaube ich, etwas anders als im ganzen FEMAR. Dass sie sich eine Skizze machen, das heisst: die Aufgabe verstehen, dass sie das nötigste aus der Aufgabe herausnehmen, dass sie das anders darstellen, das heisst, wenn es vorher ein Text ist, dass sie vielleicht eine Rechnung rausnehmen, aber noch nicht lösen, sich einfach wirklich nur ein anderes Bild der Aufgabe machen. Und dann, dass sie sich einen Lösungsweg überlegen und dass sie nachher zu einer Antwort kommen oder dann ins Begründen kommen. Das ist sicher immer das gleiche Vorgehen, was ich für sie noch wichtig finde. Dass sie wissen: «Aha, dass ist wieder so eine Aufgabe» und dass sie wie die drei Schritte haben, die sie durchgehen können. Und dann kommen sie immerhin weiter, ob sie es dann lösen können, das ist etwas anderes. Ich finde auch noch wichtig, dass man im Matheunterricht auch mit den mathematischen Begriffen arbeitet, aus meiner Sicht eben Addition, Subtraktion, eben einfach so mit ihnen spricht. Dass man die Begriffe vielfältig anwenden kann und dass man weiss, wovon man spricht.

Wieder eine ähnliche Frage: Was ist dir besonders wichtig, wenn mathematisches Argumentieren stattfindet?

Ja, das ist etwa anschliessend an das, respektive könnte man wiederholen… Ja, und was ich auch noch sehr wichtig finde, ist das Austauschen untereinander, von den Schülern selbst. Dass sie wirklich auch die Möglichkeit haben, wenn sie zum Beispiel eine Aufgabe begriffen haben, dass sie zu einem anderen gehen können oder jemand anderes zu ihnen kommt, der fragt: «Wie geht das?» und dass sie helfen können. Und zwar auch wieder mit einem klar überlegten Vorgehen, mit guten Begrifflichkeiten. Das ist schon auch, finde ich, auch noch wichtig.

Und dieser Austausch untereinander, ist der irgendwie organisiert oder findet der automatisch statt?

So ein bisschen beides. Manchmal gibt es wirklich klar Experten, also das ist mehr so ein Hintergedanke, also Experten, aber zum Beispiel kommen Leute zu mir und sagen: «Wir haben hier ein Problem» und dann schicke ich sie gerne zu den anderen, denen ich es vorhin gerade erklärt habe, dass die es aufzugreifen und zu erklären versuchen. Und manchmal ist es wirklich klar organisiert, wenn wir sagen, fünfte Klasse hat ein Problem und die Sechstklässler helfen denen zum Beispiel. Ja, aber es ist sehr individuell und es kommt auch ein bisschen darauf an, wie der Tag läuft.

Möchtest du sonst noch etwas anfügen, ergänzen, präzisieren oder speziell betonen, das dir zu dem Thema wichtig ist?

Also was ich gemerkt habe, eben: sie kommen beim mathematischen Argumentieren, so wie ich es verstanden habe (lacht), wenn man ihnen ebenso die Schritte vorgibt, dann kommen sie langsam gut rein. Und dann ist manchmal das Problem eben: man hat wie ein System, das läuft, aber dann kommt

die Aufgabe und dann hinkt es meistens. Zum Beispiel waren manchmal Aufgaben sehr einfach, sehr bewusst wahrscheinlich, damit man das eben kennenlernen kann. Und gewisse haben dann einfach gesagt: «ja, das ist das Resultat» und dann ist man darauf gekommen, «ja, aber was bedeutet das?» und nachher, «das ist einfach so!». Also sie hatten dann wie keine Handhabe mit so einfachen Sachen etwas machen zu können. Das war noch schwierig, eine Herausforderung. Und am anderen Ende eigentlich, dass gewisse Schüler einfach keine Ahnung haben, was sie mit einer Aufgabe anfangen müssen. Das heisst, dort beginnt schon, dass sie es nicht verstehen, wegen dem Deutsch, dass sie einfach völlig aufgeschmissen sind, dass ihnen die Begrifflichkeiten im Deutsch, wie auch in der Mathe fehlen und dass sie sich einfach unter einer Aufgabe nichts vorstellen können. Sie haben keine Ahnung wie sie, ich sage mal, die Skizze machen können, also was bringt ihnen die Aufgabe? Oder dass sie, was auch noch schwierig ist, ein bisschen weiterdenken, aber das ist auch eine sehr hohe Anforderung. Aber dass sie wie, sie haben eine Möglichkeit, die Rechnung zu lösen, dann von den ganz Starken könnte man ja eigentlich noch erwarten: «schaut, vielleicht findet ihr noch einen anderen Weg». Und manchmal haben sie einfach wie, sie haben ja die Lösung erreicht, was wollen sie jetzt noch damit? Und das war noch die grosse Herausforderung. Und auch der Zeitfaktor, also ich bin niemals so durchgekommen, wie das geplant gewesen wäre, ich musste immer vorher abbrechen, weil einfach die Stunde vorbei war. Ich weiss nicht, woran das lag, auch wegen dem Verständnis oder wegen gewissen Aufgaben, die ihnen sehr fremd waren, mit denen sie einfach nichts anfangen konnten, aber das ist einfach aus ihrer persönlichen Sicht. Ich konnte schon viel damit anfangen, aber bei ihnen ging es wirklich sehr schleppend, sehr langsam vorwärts. Aber es wurde immer sehr gut diskutiert. Das finde ich super. Auch so in diesen Gruppenpuzzle-Sachen oder Placemat-Arbeiten, wurde wirklich immer über das Thema gesprochen. Sie haben einfach manchmal ein wenig zu weit und zu lange gesprochen, als dass sie ein bisschen produktiv hätten vorwärtskommen können. Ja.

Also motiviert waren sie indem Fall, es ist wirklich, wie ich es raus höre an den sprachlichen Schwierigkeiten gescheitert.

Sicher auch, ja. Und ich glaube am Anfang hatte es wie so ein bisschen einen Moment gebraucht, worauf wir eigentlich hinauswollen, also was wollen wir eigentlich mit diesem ganzen FEMAR?, aber sie waren immer sehr offen für die Aufgaben und haben sie angenommen und durchgeführt, aber eben, bei gewissen merkte man: «jä, ich bin an der Aufgabe dran, ich hätte gerne noch ein bisschen mehr Zeit», aber die Zeit habe ich ihnen oftmals nicht geben wollen oder können, weil wir einfach sonst auch noch im Programm etwas hinterher waren. Aber ja, es war wirklich eine interessante Sache, aber ich glaube, es ist auch gut, wenn wir es jetzt dann langsam abschliessen können. Und ich bin vor allem auf die Standortbestimmung am Anfang gespannt, also Lernstandsanalyse sozusagen und wie das nachher ausgewertet wird. Ich bin sehr gespannt, ob gewisse immer noch bei «keine Ahnung» sind und die anderen bei «doch, jetzt habe ich es, glaube ich, teilweise begriffen». Ja, ich bin gespannt.

Interview 18

Genau. Ich würde eigentlich gern einsteigen mit der Frage, was mathematisches Argumentieren bedeutet und was die Merkmale des mathematischen Argumentierens sind.

Ähm das ist jetzt fast eine Prüfung. (lacht)Ich würde sagen mathematisches Argumentieren bedeutet, so zu argumentieren, dass man wie so erklären kann, wie und weshalb man jetzt so auf dieses Resultat gekommen ist. Und dass man eigentlich wie mehrere Sachen, also zum Beispiel, dass sie wie merken, ah wenn ich anders argumentiere kann auch ein anderes Resultat gleich richtig sein. Es geht eigentlich darum, auf dieser mathematischen Ebene sagen zu können, wieso es jetzt so ist. Und die Merkmale davon, da würde ich sicher sagen, dass es zum einen auch die Fachbegriffe sind, die man als Lehrperson geben muss. Sicher auch, ja was würde ich jetzt noch dazu sagen. Ja.

Mhm. Was sind jetzt das beispielsweise für Fachbegriffe, die du ansprichst?

Ja zum Beispiel Subtraktion, Multiplikation und so Sachen würde ich halt bei meinen Fünftklässlern erwarten, dass sie das sicher wissen. Oder dann, wenn sie etwas beschreiben müssen, also jetzt hatten wir da zwar keine geometrischen Aufgaben, aber dass sie halt sagen können, das ist jetzt die Senkrechte oder dass sie das einfach besser beschreiben können.

Mhm okay. Ähm dann habe ich eine nächste Frage. Und zwar was ist typisch im Unterricht, wenn mathematisches Argumentieren stattfindet oder auch was es ausmacht, dass es überhaupt stattfinden kann. Also was es im Unterricht braucht.

Die Kinder müssen die Aufgabe zuerst einmal verstehen können. Und erst dann können sie argumentieren. Wenn sie die Aufgabe nicht verstehen, ist es jetzt, weil sie das Deutsch nicht verstehen, oder weil sie das Wort darin nicht verstehen und dann wird es mega schwierig. Also sie müssen die Aufgabe zum Teil lösen können, damit sie sie verstehen.

Mhm okay. Was braucht es dann auch von dir in diesem Zusammenhang? Also die nächste Frage wäre so ein bisschen was dir wichtig ist beim Unterrichten des mathematischen Argumentierens oder vielleicht auch, was du im Alltag siehst, was die Schülerinnen und Schüler von dir als Lehrperson brauchen.

Mhm. Also sicher, dass die Aufgabenstellung so klar ist, dass die Kinder wissen, worum es jetzt geht. Es gibt natürlich immer Aufgabenstellungen, die so ein bisschen kompliziert formuliert sind, sodass die Kinder wie nicht wissen, was sie jetzt machen müssen. So dass dies einmal geklärt worden ist. Und danach wissen beispielsweise viele nicht, jetzt haben wir gerade ein paar Mal mit Hohlmassen gearbeitet. Und dann muss man wie nochmal aufgreifen, aha was muss man da genau machen. Dass man wie das Vorwissen ein bisschen holt und das darum, dass sie das danach besser lösen können. Oder zuerst einfach mal einen Einstieg in eine Aufgabe machen, sodass sie das danach wie verstehen, wenn sie selbst dran rangehen.

Mhm, okay. Und konkret machst du das dann mit dem einzelnen Kind oder eher in der Klasse oder wie sieht das bei dir aus?

Ja also ich würde sie wie in Gruppen nehmen und die anderen weiterarbeiten lassen. Es gibt natürlich immer Kinder, die extrem selbstständig arbeiten und es schon können. Und dann würde ich wie einfach diejenigen nach vorne nehmen, die das Gefühl haben, dass es kurz ein Input braucht zu diesem Thema oder wo zu (der Stelle), die sie nicht genau verstehen.

Gibt es noch irgendwelche Sachen, die du jetzt noch nicht erwähnt hast? So in diesem Sinne.

Also ich habe es super Unterrichtslektionen gefunden oder eine Unterrichtsreihe. Sie sind auch von den Aufgaben her gut gewählt gewesen. Das Ding ist halt einfach ab und zu ist halt wirklich das Vorwissen der Kinder ein bisschen gefragt, wo sie wie merken müssen aha, oder wie wandle ich jetzt Minuten in Sekunden um. Das war fast ein bisschen schwierig manchmal. Gut ich habe jetzt Fünftklässler und die Unterrichtsreihe ist für Fünf- und Sechstklässler. Vielleicht ist das dann bei Sechstklässlern ein bisschen anders. Ähm was mir aber gemacht haben ist, wir haben uns jetzt diese Freiheit genommen und die schwachen dann immer mit der SHP mitgeschickt. Und die SHP hat genau die gleichen Unterrichtslektionen gemacht genau nach dem Schema. Also sie haben eigentlich genau das Gleiche gemacht wie ich mit den anderen zehn Kindern. Aber sie war wie mit den anderen sieben Kindern in diesem Raum und konnte mit ihnen das Ganze noch ein bisschen besser anschauen. Also es ist wirklich für, ich habe eine relativ leistungsstarke Klasse, darum war es auch nicht immer problematisch. Aber es ist wirklich sehr schwierig, wenn noch leistungsschwächere Kinder dabei sind. Die sind dann nicht mehr dabei. Der Rubrik ist für Kinder viel zu schwierig formuliert. Man sieht auch so es ist ausführlich und für sie ist es extrem schwierig auch einzuschätzen gehört jetzt das zu dem, muss ich jetzt immer eine Skizze machen, weil eben Bilder oder Beispiele, es ist halt so ein bisschen für Kinder, also sie haben es dann oft gar nicht richtig gelesen.

Mhm.

Weil es einfach schon sehr viel Text war und das haben sie dann irgendwie vergessen. Also der Rubrik ist für Schüler relativ schwierig habe ich das Gefühl. Auch so sprachlich für ein paar. Ja, aber es ist natürlich klar, es ist jetzt, da muss man Deutsch auch gut verstehen, damit man diese Aufgaben lösen kann. Aber deshalb sind die dann mit der SHP mit und dann hatte sie wie mehr Zeit für sie. Es waren immer 45 Minuten geplant, wir hatten aber fast immer locker zwei Lektionen daran. Also wir haben ein bisschen mehr Zeit dafür investiert.

Mhm.

Weil ich habe dann auch gedacht ich möchte die Schüler wie nicht abklemmen, denn sie sind jetzt reingekommen und waren dran und deswegen habe ich es dann so gemacht. Ich hoffe das war auch in diesem Sinn gemeint. Aber ähm, ja.

Okay. Du hast das ja vorhin auch gesagt, dass sie für das mathematische Argumentieren Deutsch gut verstehen müssen.

Also es ist super also ich habe gemerkt, dass die Kinder jetzt verstehen, also bei diesen Zahlenfolgen, das war eine super Aufgabe, weil sie merken, aha man kann eigentlich durch mega viele Wege, oder auch verschieden argumentieren. Das war jetzt ein Beispiel oder eine gute Aufgabe, wo sie es gleich verstanden haben.

Mhm.

Weil man konnte ein paar Kinder nach vorne bitten und dann haben sie ihre Lösung gesagt und halt so ein bisschen argumentiert, wieso diese (Lösung) stimmt. Und dann hat man bei den Kindern gesehen, aha stimmt, das ist jetzt auch noch eine andere Variante.

Ja.

Und das ist noch cool, wenn man Aufgaben hat, die auf verschiedene Varianten gelöst werden können. Dann merken sie auch, dass sie jetzt gut argumentieren müssen, damit man diesen Weg auch versteht.

Mhm.

Aber ja ich bin jetzt gespannt, wie sie in der Prüfung abschneiden oder ja halt einfach sonst.

Mhm, ja das ist sicher spannend. Ja dann wäre eigentlich nur noch die Frage, ob du etwas anfügen willst oder ergänzen, präzisieren oder speziell betonen zum Thema mathematisches Argumentieren, zum Thema Feedback, vielleicht ist dir ja jetzt nochmals etwas in den Sinn gekommen.

Nein es ist eigentlich gut. Aber wirklich eigentlich ist das etwas, das in der fünften oder sechsten Klasse untergeht und deshalb habe ich mich auch gerade gemeldet, weil es sehr wichtig ist. Vor allem halt auch Textaufgaben, man merkt, Schüler sind immer eher negativ eingestellt, weil es halt auch etwas Schwieriges ist, aber ich habe das Gefühl, wenn man wie mal bewusst auf das schaut, dann ist es wirklich gewinnbringend habe ich das Gefühl.

Interview 19

Erste Frage: Was ist für dich mathematisches Argumentieren? Was sind Merkmale für dich vom mathematischen Argumentieren?

Also, mir ist es wichtig beim mathematischen Argumentieren, dass die Kinder eine Aufgabe, die sie lösen, danach richtig begründen können und zwar nicht nur, was habe ich gerechnet, sondern auch mathematische Begrifflichkeiten verwenden, ihren Rechnungsweg erklären können in ihren eigenen Worten. Und eben Merkmale, weil es halt mathematisch ist, dass sie nicht nur sagen «es gibt soviel», sondern, dass sie auch sagen «die Summe ist». Und, dass sie dadurch noch einmal reflektieren, was

wir gerechnet haben und dies wirklich Schritt für Schritt und eins-zu-eins erklären können, was aber sehr schwierig ist für unsere Stufe.

Wenn du jetzt vergleichst mit anderen Formen von Mathe, gibt es für dich einen Unterschied zu anderen Matheformen?

Also anderen Mathestunden in diesem Sinne?

Andere Mathestunden.

Ja, in anderen Mathestunden geht es einfach darum, ist das Resultat richtig oder nicht. Und in dieser Stunde ist der Fokus darauf, wie bin ich darauf gekommen, ob das Resultat richtig ist, ist für mich in diesem Moment zweitrangig. Sie müssen einfach ihre Denkweise richtig erklären können. Und es sind ja sehr viele Aufgaben, bei denen es mehrere Lösungen gibt und von daher ist es wichtig, dass sie sagen können, wie bin ich darauf gekommen und nicht, das ist die Lösung, weil das mal das gibt einfach das.

Was ist für dich typisch am Unterricht, wenn du mathematisches Argumentieren machst?

Typisch ist, dass die Kinder lange nicht drauskommen, sehr viele Fragen haben, sehr schnell überfordert sind, also meine jetzt vor allem. Es waren sehr anstrengende Lektionen, weil es einfach oft schon, um überhaupt ins Argumentieren reinzukommen, müsste man ja verstehen, was muss ich überhaupt rechnen. Und das ist bei vielen Kindern schon schwierig gewesen in den meisten Fällen. Sie haben sehr viel Hilfe gebraucht, um überhaupt in den Prozess reinzukommen, dass ich dann manchmal sehr aufpassen musste, dass ich nicht schon die Lösungen vorwegnehme, beziehungsweise die Erklärung. Ja, und es sind halt typische Aufgaben, bei welchen es nicht wirklich nur ein Ergebnis gibt, sondern bei denen man verschiedene Strategien ausprobieren kann, welche verschiedene Möglichkeiten geben, die man ausprobieren kann, welche, eben wie vorhin schon gesagt, verschiedene Lösungen auch geben. Was es dann spannend macht, zu schauen, wie erklären die Kinder einander ihre Lösungen und verstehen sie den Prozess, welchen das andere Kind gemacht hat oder nicht und passen sie ihres dann an oder nicht.

Machst du den didaktisch-methodisch etwas anders, gut du hast jetzt die Vorlagen von uns bekommen, aber würdest du didaktisch-methodisch etwas anders machen in einer Argumentationsstunde und in einer normalen Mathestunde?

Ja, in einer normalen Mathestunde müssen sie mir nicht so genau begründen, wieso bin ich jetzt auf das gekommen. Und meistens gibt es bei diesen Themen, welche wir durchnehmen einfach eine Lösung, fertig. Und eben beim Argumentieren ist das Wichtigste der Prozess des Begründens, für mich. Und wenn es eben ein falsches Ergebnis ist, dann möchte ich trotzdem, dass sie ihr Ergebnis erklären können und dann ist ein Teil der Aufgabe erfüllt, obwohl es vielleicht falsch ist. Und in

anderen Lektionen ist der Fokus wirklich einfach nur, ist das Ergebnis richtig oder nicht und vielleicht noch, wie habe ich es ausgerechnet, aber nicht «Wieso?».

Du bist schon ein bisschen darauf eingegangen. Was ist dir, vielleicht kannst du es noch einmal kurz wiederholen, was ist dir wichtig beim Unterrichten von mathematischem Argumentieren?

Besonders wichtig ist, dass sie wirklich ihren Weg begründen und erklären, vielleicht mit einer Skizze oder einem Bild, Zeichnung, wie bin ich auf dieses Ergebnis gekommen. Und auch, dass sie bei mir sehen, es gibt nicht nur einen Weg. Wenn ich zum Beispiel mit ihnen exemplarisch einmal ein Beispiel durchgerechnet habe, dann zeigen, schau, ihr könnt es so angehen, ihr könnt es aber auch so angehen. Es könnte das geben, es könnte auch das geben. Und besonders schön sind jeweils die Momente, jetzt wie heute mit dieser Fischaufgabe, wenn dann ein Schüler mich anschaut und anfängt zu strahlen: « Ja aber, das gibt ja verschiedene Lösungen.» Und damit dann ergründen, wieso und so macht es Spass. Aber wir hatten sehr viele Stunden, welche auch nicht so spassig waren.

Interview 20

Die erste Frage ist so über das mathematische Argumentieren. Was ist für dich mathematisches Argumentieren? Was sind vielleicht Merkmale? Was ist vielleicht typisch beim mathematischen Argumentieren? Einfach, was dir gerade so einfällt.

Ja. Für mich steht es so ein bisschen im Gegensatz zum reinen automatisierenden Rechnen. Wie zum Beispiel bei den Operationen, wo es einfach mehr oder weniger nur einen Weg gibt, und diesen einübt, automatisiert und immer wieder trainiert und hoffen, dass es anhält.

Mhm.

Das Argumentieren ist für mich, wenn es mehr offene Aufgaben und verschiedene Wege enthält und man nicht nur von den Kindern erwartet, dass sie die Operationen, die Fertigkeiten ‘nur’ abrufen können und auch weiterdenken können, selbstständig Denken.

Mhm.

Eigene Lösungswege versuchen herauszufinden und aufzuzeichnen.

Ja.

Was sehr Freude bereitet, dass bei einer Aufgabe drei, vier Lösungen herausgekommen sind.

Mhm.

Zum Teil aber auch andere Lösungen, welche nicht in der Lösung sind.

Ah Ok. Ja.

Was ich auch sehr spannend und zum Teil herausfordernd gefunden habe, auf die Schnelle wieder zu verifizieren, ja, doch das stimmt auch oder nein das ist jetzt noch nicht ganz fertig gedacht.

Ja.

Also, das wäre so etwa das.

Ok.

Für die Kinder war es vielleicht ab und zu anstrengend. Sie kamen auch fragen, wieso wir das machen müssen.

Mhm.

Weil sie sich zum Teil gar nicht gewöhnt sind so frei und selbstständig zu studieren. Weil wir normalerweise viel mehr Struktur vorgeben. Das Ziel und der Weg sind wie klar. Und hier ist das Ziel der Weg.

Ja. Mhm.

Das hat man manchmal den Kindern angemerkt. Weil es einfach in der fünften Klasse, in dieser Stufe, welche ich habe, für sie eine grosse Herausforderung war.

Mhm.

Ich glaube hätte man eine sechste Klasse, wäre es schon weniger eine Herausforderung.

Jawohl, Ja. Du hast in diesem Fall eine fünfte Klasse?

Ja.

Und Helene hat eine sechste Klasse?

Ja, genau.

Genau. Ja, Ok. Gut, wunderbar. Die zweite Frage wäre: Was ist typisch im Unterricht, wenn mathematischen Argumentieren stattfindet? Wenn du an die Unterrichtssituation denkst, welche du jetzt gemacht hast. Was war jetzt typisch auch im Vergleich zu anderen Lektionen?

Für mich war es immer ein weniger der gleiche Rhythmus. Zuerst arbeiten sie allein, dann tauschen sie es aus und nachher schaut man es zusammen im Plenum an.

Ja.

Und es war viel, dass ein Kind irgendwo am Arbeiten war. Zu Beginn waren sie auch nicht gleich schnell, weil es zu Beginn nicht so geführt wurde.

Mhm

Jeder sollte selbst überlegen, wie könnte man auf den Weg kommen.

Ja.

Die anderen waren noch am überlegen, andere waren bereits am Austauschen.

Mhm.

Dort habe ich manchmal auch noch weitere Aufgaben gegeben. Diese waren dann schon weiter am Studieren.

Ja.

LP: Ich würde sagen, das ist schon charakteristisch. Das kommt ansonsten schon im Mathematikunterricht vor.

Mhm.

Aber deutlich weniger, wie jetzt.

Ja.

Wenn man jetzt einfach Operationen einübt, ist der Austausch nicht so zentral, wie jetzt beim Argumentieren.

War es in diesem Fall auch unruhiger im Klassenraum? Oder sprechen sie auch ansonsten viel miteinander?

Sie ist eine sehr fleissige Klasse. Und sie haben es sehr gut im Griff, dass sich einige miteinander austauschen ohne, dass es zu laut wird. Sie sind nicht am Flüstern.

Ok, schön.

Aber meiner Meinung und Empfindung nach immer in einem sehr angenehmen Arbeitston.

Ja.

Aber jetzt nicht nur in der Mathematik, sondern das ist generell so. Aus diesem Grund ist mir diese Aufgabe entgegenkommen mit dieser Klasse.

Ja.

Ansonsten sind sie in den Gruppenraum oder nach draussen gegangen.

Ein wenig verteilen.

Aber irgendwann sind sowieso alle am Diskutieren, dann spielt es auch keine Rolle mehr.

Gut. Dann gehen wir weiter. Was ist dir wichtig beim Unterrichten vom mathematischen Argumentieren?

Ich weiss es nicht mehr, welche Aufgabe es war. Aber dort ist herausgekommen, dass sie mehr Lösungen herausgefunden haben, als überhaupt in den Lösungen stand.

Mhm.

Um ihnen wirklich Zeit zugeben, um zu überlegen. Damit die Vielfalt dieser Möglichkeit überhaupt stattfinden kann. Ohne, dass man ihnen die Strukturen vorgibt. Und ihnen auch wirklich diese Plattform ermöglicht. Es gibt kein richtig oder falsch.

Dass man die verschiedenen Wege versteht.

Ihr müsst mal ausprobieren, wie es funktionieren könnte. Einfach daran bleiben und am Schluss wieder überprüfen, ob es überhaupt einen Sinn macht und nicht zu viel vorausgeben. Aber das ist manchmal gar nicht so einfach.

Ja.

Das muss ich auch sagen. Wir haben eine Lektionsplanung, welche die Zeit 10 Minuten vorgibt. Und ich bin in der ersten Viertelstunde. Also, vom Zeitplan her ist es schwierig, dass man den Kindern nicht die Lösung vorgibt.

Ein wenig vorwärts machen. Ihr habt das Programm erhalten?

Ja. Ich glaube das war auch ein Knackpunkt. Als ich mit Helene gesprochen habe, sie hatte eine sechse Klasse. Sie meinte, sie war nach 30 Minuten fertig und es sollte 60 Minuten dauern. Und ich hätte fast 1.5 h benötigt für das Programm, welches vorgeschlagen wurde.

Ihr hattet dasselbe Programm?

Ja.

Einmal für die fünfte Klasse und einmal für die sechste Klasse?

Ich glaube es waren sogar die gleichen Aufgaben. Jedoch müsste ich es nochmals vergleichen mit ihr.

Ja.

Aber das hat es manchmal schwierig gemacht. Und am Anfang benötigten sie sehr viel Zeit. Wirklich viel Zeit. So musste ich zum Teil die Vorbereitungsaufgaben als Hausaufgaben mitgeben. Weil wir ansonsten nicht vorwärtskamen und wir zwei Lektionen benötigten hätten.

Ja.

Diese Zeit haben wir in diesem Sinne leider nicht.

Ja. Gut. Wenn wir jetzt noch ein wenig überlegen, was wichtig ist beim Unterrichten. Vielleicht denken wir, wenn wirklich eine Lektion mathematisches Argumentieren stattfindet. Was muss von der Lehrperson kommen, dass es die Schüler verstehen? Oder dass sie es umsetzen können. Oder dass sie die verschiedenen Lösungswege machen können? Oder dass sie überhaupt mit der Aufgabe starten können? Wenn wir es mit der Englisch Lektion vergleichen, gibt es Unterschiede zu so einer Lektion? Vielleicht gibt es auch keine Unterschiede?

Es ist noch schwierig, wenn wir es mit Englisch vergleichen.

Mhm.

Allgemein mit einer Fremdsprache. Das ist vielleicht ein anderes Pflaster.

Ja.

Was natürlich ist. Ich habe zu Beginn mit ihnen immer wieder auf das Kriterienraster zurückgegriffen, bevor sie mit dem Lösen begannen. Ich wollte mit ihnen diskutieren, was ist wichtig, auf was sie achten sollten. Das mache ich ansonsten nicht so extrem im Unterricht, dass es so Kriterien bezogen ist. Aber das stand auch effektiv so in der Planung.

Ist es in der Planung gestanden?

Ja. In der Planung ist gestanden, dass man sie darauf aufmerksam machen sollte. Natürlich habe ich es versucht so zu machen. Das mache ansonsten im normalen Unterricht nicht so extrem.

Hattest du das Gefühl, dass war notwendig? Oder hättest du es nicht gemacht, wenn nichts gestanden wäre?

Ich persönlich habe es zum Teil schwierig gefunden diese Kriterien zum Beispiel in den Musterlösungen zu finden. Zum Teil hatte ich Schwierigkeiten es dann auch gut den Kindern zu erklären. Was wollten sie in den Musterlösungen hören. Was danach mehr nach Bauchgefühl durchgeführt wurde.

Ja.

Ein Kriterium war: Ein Bild. Wenn ich das als Lösung sehe und ich den Kindern sagen muss, dass sie noch ein Bild dazu zeichnen müssen, war für mich auch nicht immer einfach. Es geht ja nicht darum, dass meine Schüler eine Glace zeichnen können. Es sollte mehr da sein, um ihnen zeigen zu können, was gemeint ist. Da könnte ich sagen, aber hier ist für mich die Rechnung nicht sichtbar. Was auch ein klares Kriterium ist. Der Rechnungsweg soll sichtbar sein. Es steht zwar eine Begründung aber ansonsten nichts. Deshalb war es für mich ziemlich schwierig. Ich konnte ihnen nicht sagen, so hättet ihr wirklich ein Kriterium erfüllt. Meiner Meinung nach erfüllen diese Musterlösungen zum Teil auch nicht alles. Aber ich bin kein Mathematik-Profi. Das ist meine persönliche Meinung.

Interview 21

Meine Frage wäre eigentlich was mathematisches Argumentieren ist und was die Merkmale des mathematischen Argumentierens sind. (lacht)

Das ist ja gleich schwierig.

Ja.

Ja also ich kann, ja das ist jetzt immer so spontan, also ich sage jetzt, also ich glaube, also einfach, ich sehe es bei den Schülern. Wenn sie mir etwas beweisen können oder argumentieren können mithilfe von Zahlen. Das wäre für mich mathematisches Argumentieren. Also das haben wir jetzt heute an einem Beispiel gesehen, wenn sie nicht nur etwas in Worte fassen, sondern dass man auch etwas darauf aufzeigt und danach den Weg sehen kann.

Mhm.

Ja.

Okay, also möchtest du vielleicht ein konkretes Beispiel nennen, das du vielleicht heute gesehen hast? Ist vielleicht einfacher so gleich nach dem Unterricht.

Ja also ich habe jetzt gerade beim einen Schüler gesehen, dass er ähm diese Zahlenfolge machen musste und er hat sich wahnsinnig schwergetan und ich musste ihn darauf hochlüpfen. Und ihm aber auch so wie zeigen, wie er von der einen Zahl zur anderen kommt. Und was haben diese Zahlen für eine Verwandtschaft miteinander. Und am Schluss kommen dann halt auch alle mathematischen Begriffe. Also, dass sie die mathematischen Begriffe auch richtig anwenden. Und jetzt eben, ja eben, wie komme ich von zwei auf vier oder wie komme ich von zwei auf zwanzig, wo enthält es da so eine Verwandtschaft.

Mhm. Ja. Und was sind das für mathematische Begriffe? Oder also was kann man sich so darunter vorstellen? (lacht)

Ja, also ich nenne jetzt ein Beispiel. Ähm, also eines haben wir jetzt heute gehabt mit der Quadratzahl. Ein Schüler ist vorher noch rasch vorbeigekommen und hat gesagt ja diese Dingszahlen da und dann habe ich gesagt das sind Quadratzahlen, wir sprechen von einem Quadrat und das ist nicht gleich ein Viereck und ähm ja Primzahlen und so weiter. Einfach wirklich, dass sie Fachbegriffe nennen.

Ja. Fachbegriffe. Mhm. Okay. Ähm, was ist typisch bei dir im Unterricht, wenn mathematisches Argumentieren stattfindet oder auch vielleicht ähm was, dass es ausmacht, dass es stattfinden kann und was es dazu braucht.

Ähm. Also ich finde es höchst anspruchsvoll mit einer Klasse grundsätzlich auch zu argumentieren, weil es auch immer ein Zeitfaktor ist. Ja es ist halt einfacher mit Lösungen und diese dann auch zu korrigieren oder zu besprechen, als zu diskutieren oder zu argumentieren im Sinne von «Warum bin ich jetzt auf dieses Resultat gekommen?» Und ähm bei mir im Unterricht ist es jetzt so, dass es gerade durch diese Studie wieder so Blitzlichter gegeben hat, weil ich das immer wieder gemacht habe, aber wenn ich jetzt so zurückschaue, dieses mathematische Argumentieren ist nicht etwas, dass jetzt im täglichen Mathegeschäft in der Schule vorkommt. Also ja. Es fehlt sicher ein bisschen die Zeit.

Mhm, okay. Also hat es für dich auch diese Studie gebraucht, um mathematisches Argumentieren stattfinden zu lassen? Oder was braucht es denn, wie versuchst du, die Schülerinnen und Schüler vielleicht auch zu animieren, mathematisch zu argumentieren?

Ja das hat sicher, also das muss man schon sagen, mit dem schon ein bisschen zu tun, dass man das zu wenig macht. Aber ich habe mir das jetzt auch wirklich zu Herzen genommen, hey, jetzt wieder wie diese Form gemacht werden soll, das miteinander über Mathe sprechen. Und ja. Das ist jetzt vielleicht für mich wie ein Start, um dies auch regelmässig zu machen.

Mhm.

Ich habe einfach auch gemerkt, jetzt auch von der Studie her, dass ich einfach, also ich musste wie schauen, dass ich diese Zeit überhaupt habe, um jetzt diese Studie durchzuführen.

Ja.

Also ich habe das Gefühl, dass ich in der Mathe, also ich habe natürlich den Vergleich zum letzten Jahr, dass ich in der Mathe vier bis fünf Wochen in Verzug bin.

Ja.

Also ja.

Mhm okay. Aber meinst du denn, dass es sich lohnt, diese Zeit zu investieren?

Ich glaube es lohnt sich, aber man muss das so ein bisschen bewusst einsetzen, nicht dass man jetzt nur noch über die Mathe sprechen will und das begründen will, sondern, dass es einfach ein bisschen punktuell ist.

Ja.

Also ich glaube, weil sonst, also den Lehrplan kann ich sonst nicht erfüllen.

Ja. Dann was ist dir wichtig beim Unterrichten vom mathematischen Argumentieren? Was brauchst du, um das (Pause)?

Ja das haben wir vorher ja schon so ein bisschen gesagt.

Mhm, also (Pause).

Ja nein, also dass man, also mir ist wichtig, dass alle auch zu Wort kommen.

Mhm.

Weil ich glaube dann hast du drei, vier die wirklich stark sind in Mathe, und mit denen ist es ja dann auch spannend zu sprechen und die können teilweise auch gut argumentieren. Und andere Schüler weniger. Also die Schüler, die jetzt bei mir waren, die sind jetzt zufällig alle recht stark in Mathe.

Mhm.

Matheschüler.

Und wie machst du das sonst, wenn du auch noch schwächere Schüler und Schülerinnen hast? Wie animierst du die, damit diese auch noch zu Wort kommen können, weil du sagst, dass dir das wichtig ist?

Ja bei uns gibt es noch die Betreute Studie. Also betreute Hausaufgabenzeit. Und ich nehme dann wirklich gleich aufgrund eines Mathetests packe ich mir diese Schüler eins zu eins oder zu zweit zusammen und dann kommen eben auch die schwachen Schüler zu Wort. Und dann ist es wirklich so ein bisschen, wir haben so Gefässe, in denen ich diese auch abholen kann.

Mhm.

Und dann auch aus ihnen herausholen kann, wo die Schwierigkeiten liegen. Das ist jetzt bei uns so.

Interview 22

Also, dann würde ich gerade mit der ersten Frage beginnen. Was ist mathematisches Argumentieren? Was sind Merkmale oder aus Ihrer Sicht, was ist typisch für das mathematische Argumentieren?

Also bestimmt ein logisches Argumentieren, sodass man es nachvollziehen kann. Nicht nur selbst verstehen, sondern, dass die anderen nachkommen und dass man schlussendlich zum richtigen Resultat kommt. Den Weg finde ich nicht so entscheidend, aber treffend, klar formulieren, sodass nachher jeder mitkommt, ja.

Und wenn Sie jetzt an Ihren Unterricht denken, was ist dort typisch, wenn Sie mathematisches Argumentieren durchführen, also wenn das stattfindet bei Ihnen im Unterricht?

Ja ich denke, vieles läuft über das mündliche Argumentieren. Wenn wir etwas erarbeiten, dass sie dann erklären, wie sie darauf gekommen sind oder wieso das eine sein muss und das andere nicht. Das schriftliche Argumentieren, was jetzt in diesem Projekt eigentlich grösser war, das ist eigentlich eben so ein bisschen ein «Stiefmütterchen». Obwohl das bei mir im Mathebuch eigentlich schon drin ist, aber es ist nicht so als wichtig hervorgehoben. Daher, denke ich, läuft mehr über das Mündliche als über das Schriftliche. Obwohl es ja auch Aufgabengebiete drin hat, wie Zufall und Wahrscheinlichkeit und Regeln und Strategien, welche das eigentlich auch beinhalten.

Und als Sie dies jetzt im Unterricht durchgeführt haben, was war da jetzt vielleicht typisch? Worauf haben Sie besonders geachtet?

Also vielmals haben sie es mir einfach zu wenig genau aufgeschrieben. Als ich dann nachgefragt habe, konnten sie es eigentlich sehr gut erklären, aber so ein bisschen die «Schreibfaulen» oder das andere, wie kann ich treffend etwas formulieren, sodass alle nachkommen? Das ist so ein bisschen das, was gefordert hat.

Das geht vielleicht auch gerade noch so ein bisschen in die nächste Frage. Was ist Ihnen besonders wichtig gewesen? Die Reihe hat Sie ja auch sehr interessiert, die Unterrichtsreihe. Was war Ihnen wichtig, als Sie dies in Ihrem Unterricht durchführten?

Also das eine ist, dass eben gute Erklärungen ebenso von den Schülern kommen können, von den Klassenkameraden, nicht unbedingt durch mich. Das ist das eine. Und das andere, dass es eben wirklich nachvollziehbar ist. Das war so der grosse Punkt. Wir haben schon während dem ganzen Schuljahr so Wochenrätsel gelöst und haben dies eigentlich schon so ein bisschen trainiert. Teils waren halt auch dort die Lösungen schon sehr plakativ einfach. Es war einfach so «Punkt», wo wir gesehen haben, nein das gilt nicht. Man muss aufschreiben, man muss darstellen, man muss zeichnen, man muss was auch immer, sodass man nachher zu einem Schluss kommt.

Interview 23

Was ist mathematisches Argumentieren für dich? Was sind Merkmale?

Dazu gehört für mich sicher eine Begründung: Warum macht man es so? Es ist für mich auch wichtig, dass man einen Weg aufzeigt: Wie ist man vorgegangen? Und es gehört für mich auch noch eine fachliche Ebene dazu, dass man sagt, also dass man auch die mathematischen Begriffe zum Beispiel verwendet, dass man die mathematische Sprache braucht zum Begründen und Argumentieren. Ja, was habe ich gesagt? Wege, ja und Begründungen, ja, denke ich mal, sind so wichtige Schritte.

Was ist ganz typisch in deinem Unterricht, wenn mathematisches Argumentieren stattfindet? Du hast ja da jetzt eigentlich schon Punkte angesprochen, wenn du probierst, auf deinen Unterricht einzugehen.

Ich arbeite noch dialogisch und dort ist das immer ein wichtiger Aspekt, dass man zeigt, wie man es macht, also ich will wissen, was die Kinder denken, was in ihren Köpfen vorgeht. Mir ist wichtig, dass sie das aufs Papier bringen – einerseits für sich, um für sich Klarheit zu bekommen, aber auch um anderen zeigen zu können: «So habe ich es gemacht» und ich kann ihnen dann so auch helfen, ich merke: «ah, hier hast du einen Gedankenfehler, einen Schrittfehler gemacht, einen Überlegungsfehler gemacht» und kann auch genau konkret darauf hinweisen, «Wo bist du gescheitert?». Aber auch damit ich aufzeigen kann: «genau, das ist ein wichtiger Teil», ich kann den Aspekt auch herausnehmen und für die ganze Klasse offenlegen. Das ist, glaube ich, ein wichtiges Merkmal und das zieht sich natürlich auch immer im Unterrichtsgespräch durch, also mich interessieren die Lösungen ja schon auch, also oder die Lösungen sind mehr… man merkt, man hat alles richtig gemacht. Aber viel wichtiger ist ja das, was zwischen Aufgabe und Lösung stattfindet und wenn jemand an der Wandtafel etwas vorzeigt, dann soll er sich mitteilen, was sie sich jetzt überlegen, was sie jetzt da genau machen. Oder bei Mathematikprüfungsverbesserungen führe ich eine Fehleranalyse ein, bei der sie auch begründen… oder nachprüfen müssen, was sie falsch gemacht haben. Jetzt diese Klasse ist Anfang fünfte Klasse, die sind jetzt noch nicht so weit, aber das wird jetzt dann bald kommen bei

ihnen und eben im Reisetagebuch, in welchem sie viel erklären oder erzählen müssen, was sie machen oder was für Ideen sie haben. Dass sie das auf Papier bringen. Das ist, glaube ich, typisch bei mir.

Ja, vielleicht, das ist wahrscheinlich eine sehr ähnliche Frage: Was ist dir besonders wichtig, also wirklich, dass sie das indem Fall verschriftlichen und dokumentieren?

Genau. Und eben, dass ich… also mich interessiert, was bei ihnen vorgeht, was sie sich überlegt haben. Ja, mich interessiert, wie sie es machen. Das kann auch bei einer einfachen Rechnung sein, also wenn man zweistellige Zahlen addiert, kann es sein, dass sie das zerlegen und den Zehner und den Einer getrennt addieren oder andere füllen vielleicht auf und gehen so vor, ja.

Interview 24

Was ist mathematisches Argumentieren für dich? Was sind Merkmale?

Dazu gehört für mich sicher eine Begründung: Warum macht man es so? Es ist für mich auch wichtig, dass man einen Weg aufzeigt: Wie ist man vorgegangen? Und es gehört für mich auch noch eine fachliche Ebene dazu, dass man sagt, also dass man auch die mathematischen Begriffe zum Beispiel verwendet, dass man die mathematische Sprache braucht zum Begründen und Argumentieren. Ja, was habe ich gesagt? Wege, ja und Begründungen, ja, denke ich mal, sind so wichtige Schritte.

Was ist ganz typisch in deinem Unterricht, wenn mathematisches Argumentieren stattfindet? Du hast ja da jetzt eigentlich schon Punkte angesprochen, wenn du probierst, auf deinen Unterricht einzugehen.

Ich arbeite noch dialogisch und dort ist das immer ein wichtiger Aspekt, dass man zeigt, wie man es macht, also ich will wissen, was die Kinder denken, was in ihren Köpfen vorgeht. Mir ist wichtig, dass sie das aufs Papier bringen – einerseits für sich, um für sich Klarheit zu bekommen, aber auch um anderen zeigen zu können: «So habe ich es gemacht» und ich kann ihnen dann so auch helfen, ich merke: «ah, hier hast du einen Gedankenfehler, einen Schrittfehler gemacht, einen Überlegungsfehler gemacht» und kann auch genau konkret darauf hinweisen, «Wo bist du gescheitert?». Aber auch damit ich aufzeigen kann: «genau, das ist ein wichtiger Teil», ich kann den Aspekt auch herausnehmen und für die ganze Klasse offenlegen. Das ist, glaube ich, ein wichtiges Merkmal und das zieht sich natürlich auch immer im Unterrichtsgespräch durch, also mich interessieren die Lösungen ja schon auch, also oder die Lösungen sind mehr… man merkt, man hat alles richtig gemacht. Aber viel wichtiger ist ja das, was zwischen Aufgabe und Lösung stattfindet und wenn jemand an der Wandtafel etwas vorzeigt, dann soll er sich mitteilen, was sie sich jetzt überlegen, was sie jetzt da genau machen. Oder bei Mathematikprüfungsverbesserungen führe ich eine Fehleranalyse ein, bei der sie auch begründen… oder nachprüfen müssen, was sie falsch gemacht haben. Jetzt diese Klasse ist Anfang fünfte Klasse, die sind jetzt noch nicht so weit, aber das wird jetzt dann bald kommen bei

ihnen und eben im Reisetagebuch, in welchem sie viel erklären oder erzählen müssen, was sie machen oder was für Ideen sie haben. Dass sie das auf Papier bringen. Das ist, glaube ich, typisch bei mir.

Ja, vielleicht, das ist wahrscheinlich eine sehr ähnliche Frage: Was ist dir besonders wichtig, also wirklich, dass sie das indem Fall verschriftlichen und dokumentieren?

Genau. Und eben, dass ich… also mich interessiert, was bei ihnen vorgeht, was sie sich überlegt haben. Ja, mich interessiert, wie sie es machen. Das kann auch bei einer einfachen Rechnung sein, also wenn man zweistellige Zahlen addiert, kann es sein, dass sie das zerlegen und den Zehner und den Einer getrennt addieren oder andere füllen vielleicht auf und gehen so vor, ja.

Interview 25

Gut. Also meine erste Frage wäre, was ist für dich mathematisches Argumentieren? Was sind für dich Merkmale vom mathematischen Argumentieren?

Wenn die Kinder eigentlich zeigen oder sagen können, dass sie das dahinterliegende System verstanden haben. Es war auch vorhin ganz spannend zu sehen, dass beim Schüler, mit dem ich vorhin noch gesprochen habe. Er ist seit gut zwei Jahren in der Schweiz. Er hat sprachlich grosse Probleme. Ich habe bemerkt, dass er eigentlich versteht um was es geht. Aber er hat es einfach nicht argumentieren können. Er hat es schlussendlich nicht versprachlichen können. Aber am Schluss konnten wir es zeigen. Und ich habe es ihm nochmals bildlich mit dem Geld zeigen müssen, mit der Stellenwerttafel. Dort hat er es sofort wieder verstanden. Aber vorhin nur mit Wort ist es zum Teil schwierig für ihn, es zu verstehen, um was es hier geht. Nachher hat er es mir aber noch zeigen können. Es geht darum. Hier muss es sein. Er konnte es mir am Bild zeigen.

Gilt es auch für dich ...

Das Argumentieren enthält stark die Sprache. Da ist zum Teil ein Problem bei uns.

Und das ist für dich auch das andere zum normalen Rechnen?

Ja, dass hier eigentlich noch stark die Sprache enthalten ist. Wobei für mich das Argumentieren auch mit einem Bild dargestellt werden kann.

Ja.

Oder mit einer grafischen Darstellung. Beispielsweise wie mit der Stellenwerttafel. Wenn sie es mir auf der Stellenwerttafel zeigen können, kann es für mich auch schon ein Argumentieren sein. Hinter dem Argumentieren ist ganz stark das Verstehen, um was geht es eigentlich, habe ich das System erkannt.

Mhm.

In diesem ist die Sprache sehr stark enthalten. Also einfach in diesen Vorbereitungen, die wir hier haben.

Ja. Und. Und so vom Unterricht her. Was sind für dich Merkmale, wenn du das Argumentieren im Unterricht umsetzt? Also so das methodische, didaktische. Oder ist es sonst wie eine normale Mathematiklektion oder gestaltest du es anders? Oder würdest du das anders gestalten?

Ich habe es jetzt natürlich anders gestalten müssen. Erstens habe ich Vorgaben erhalten und zweitens ist es etwas, was man am Anfang stark leiten muss, bis etwas Neues gewesen war. Und es ist etwas, wo man nicht … Wir versuchen momentan stark auf Erfahrung, mit Erfahrungen, mit Material zu arbeiten. Und diesbezüglich ist es hier zum Teil schwierig. Also ja, denn sie müssen ja etwas formulieren oder hinter etwas kommen. Also ich habe auch, wo es nötig war, Material zur Verfügung gestellt. Und sagte, versucht es einmal mit diesem Material. Nein, für mich ist es eigentlich mehr die Erkenntnis, dass ich viel mehr auf Fragen wie, warum ist es so, eingehe. Auch beim handelnden Aspekt werden solche Fragen gestellt. Das man viel schneller auf Erkenntnisse kommt, ah ... hier passiert etwas. Was passiert denn jetzt? Die Bewusstseinsebene wird nochmals geöffnet. Das Bewusstsein nochmals schärfen. Jetzt schauen wir nochmals hin, warum passiert das? Vielleicht beim 1 x 1 (Ein mal Eins) einmal die Muster auf dem Hunderter-Feld einzeichnen und schauen, was passiert da. Hat jemand eine Ahnung, weshalb das hier so ist. Also mehr im laufenden Unterricht hinterfragen, ist für mich die Erkenntnis.

Interview 26

Gut, dann beginnen wir doch gleich. Was ist mathematisches Argumentieren? Was sind so Merkmale?

Also, im Unterricht war es jetzt etwas anders als auf diesen Theorieblättern, die wir jetzt erhalten haben. Im Unterricht was es für mich wichtig, dass die Kinder begründen konnten, warum sie etwas so gemacht haben, wie sie es gemacht haben. Dass sie es darstellen konnten, einordnen, vielleicht skizzieren, zeichnen. Einfach erklären. Ja, das war so das Hauptanliegen, welches ich gehabt habe.

So der grundlegende Unterschied zur normalen Mathematik, also so diese die man kennt? Für jemand der keine Ahnung hat, was das ist?

Dass es nicht hauptsächlich darum geht, ein Resultat herauszufinden, sondern den Weg dorthin wie zu gehen und auch im Nachhinein vor allem begründen können, warum ich jetzt gerade darauf gekommen bin, welches ich jetzt präsentiere. Es geht eigentlich weniger darum, dass man das Resultat der Lehrperson zeigt, sondern mehr, dass man sagen kann, warum, was habe ich überlegt, was ist in meinem Kopf vorgegangen, dass ich auf das gekommen bin, dass ich das andern erklären kann.

Was ist so typisch in Ihrem Unterricht, wenn mathematisches Argumentieren stattfindet?

Es wird viel geredet (lacht). Aber im positiven Sinn. Das heisst, wir machen, oder wir haben anfänglich viel aufgeschrieben, jeder für sich, und irgendwann habe wir gemerkt, dass es viel mehr bringt, wenn wir wirklich mit Fragen zu zweit oder in Dreiergruppen zusammenarbeiten und das miteinander austauschen und dann sofort nachfragt, warum, kannst du mir das erklären. Das ist eigentlich, wie so ein wenig das Ziel gewesen. Wir sind eine relativ kleine Klasse. Darum haben wir auch die Planung ein wenig abgeändert. Wir haben vielmals Gruppenarbeiten gemacht. Ähm ja, das war so das Hauptsächliche, würde ich sagen. Wir haben viel präsentiert mit Poster, viel den anderen vorgezeigt, was wir gemacht haben. Und haben die Methoden natürlich angewendet. Mit verschiedensten Postern etc., wo sie mit Feedbackrunden, das war eigentlich noch spannend, das war sicher anders als zusammen streng nach Zahlenbuch gehen, wie wir das sonst machen.

Gerade eine ähnliche Frage. Was ist Ihnen wichtig beim Argumentieren? Bei diesem Unterricht? Was liegt Ihnen am Herzen?

(stöhnt) Das ist eine gute Frage. Hmm (Denkpause). Beim Unterrichten, also das heisst wenn ich das unterrichte? Also was ist mir wichtig, was ich den Schülern bringen kann? Also was die Schüler davon haben?

Ja, also auf was sie Wert legen. Wo sie finden, doch das muss kommen.

Also, was ich, bei mir sehr gewichte, ist, dass ich mit den Kindern viel austausche. Also einfach eins zu eins oftmals, oder ihre Antworten genauer ansehe. Das habe ich auch gemerkt, dass mache ich sonst weniger. Das war sicher auch etwas Gutes. Normalerweise, wenn ein Resultat steht, ist es in Ordnung, dann wird es abgehackt. Und beim Argumentieren war es jetzt so, auch wenn ein Resultat richtig war, wollte ich noch wissen, warum stimmt das. Und das ist sicher eine Frage, welche ich sonst weniger stelle, wenn ein Resultat da ist. Wenn kein Resultat da ist, dann wird es automatisch. Wieso hast du es nicht verstanden? Was sind die Schritte, um es zu machen? Und wenn es kommt, dann wird es wie nicht mehr hinterfragt, der Gedankenprozess. Und das habe ich jetzt mehr hinterfragt.

Was gelingt gut bei Ihrer Klasse und was gelingt weniger?

Die Grundhaltung ist sicher anders als am Anfang. Am Anfang war wirklich, also es ist ein wenig eine spezielle Schule, weil wir haben nur jede zweite Woche diese Klasse und darum war es wie jede zweite Woche ein wenig etwas Neues für die Kinder, im Sinne von sie wissen nicht mehr genau wie das war, es ist ein relativ langer Zeitraum, wo sie es nicht mehr geübt haben und dann muss man wie zuerst wieder reinkommen und das braucht seine Zeit. Und das andere ist sicher, das mit der Sprache, das war teilweise nicht einfach so für fremdsprachige Kinder. Das würde ich sagen, das ist jetzt sicher viel besser gelungen in letzter Zeit als vorher.

Interview 27

Hier wäre die erste Frage. Was ist mathematisches Argumentieren allgemein und was sind die Merkmale davon?

Also die Schüler wollen ja immer gerne die Lösung sagen, aber sie haben Mühe zu sagen, warum es diese Lösung gibt. Sie sehen die Mathematik als Fach an, in dem man irgendwie einfach die richtige Lösung sagen muss. Und der Weg wie man darauf kommt interessiert sie nicht. Durch das Argumentieren sind sie plötzlich gezwungen, darüber nachzudenken, wieso ist eigentlich eins und eins zwei jetzt ganz einfach gesagt. Und, ähm, wenn sie das vermehrt machen würden, würden sie zwar mehr Zeit brauchen, was ihnen eigentlich nicht passt, weil Zeit für sie ein sehr wichtiger Faktor ist. Also wenn sie länger für eine Aufgabe haben, dann ist es immer schlechter, als wenn sie die Aufgabe schnell lösen können. Und dort liegt ein bisschen das Problem, dass sie auch nicht so gerne Argumentieren, weil das mehr Zeit braucht. Weil es wie kein klares Ja oder Nein dazu gibt.

Mhm. Was ist dann typisch in deinem Unterricht, wenn mathematisches Argumentieren stattfindet?

Also das Argumentieren hat einerseits einen logischen Aspekt. Also, dass man sagen kann zweimal drei gibt sechs, weil drei und drei gibt sechs. Man kann es also quasi umstellen, man kann es mit einer vereinfachten Darstellung zurückführen, man kann es zeichnen, man kann es an einem Beispiel machen. Es ist wie drei Äpfel und drei Äpfel sind sechs Äpfel oder so. Also man kann es verbildlichen, man kann es zeichnen, man kann es darstellen mit Pfeilen, man kann (…). Das ist einerseits dieses logische. Und dann andererseits hat es auch eine Art einen philosophischen Aspekt, wo man sagt, jetzt hör auf damit einfach zu sagen, dass drei und drei sechs gibt, sondern überlege dir einmal, was das alles bedeuten könnte, also zweimal drei Äpfel, zweimal drei Birnen, zweimal drei Häuser, zweimal drei Menschen, ja sind denn diese drei Menschen gross oder klein? Die zweiten drei sind Kinder, die ersten drei sind vielleicht Erwachsene. Und trotzdem sind alles Menschen. Also, dass eins und eins vielleicht gar nicht zwei gibt, sondern vielleicht nur eineinhalb, weil das eine vielleicht ein grosser Mensch ist und das andere ein kleiner. Also man sieht, dass das Argumentieren einerseits ist es eine Verunsicherung von der Logik und andererseits ist es eine Anwendung der Logik.

Mhm. Was ist dir besonders wichtig in deinem Unterricht zum mathematischen Argumentieren?

Genau das sind genau diese zwei Sachen, die ich vorhin gesagt habe. Eigentlich im, ähm, (…). Aber das Problem ist natürlich, wenn man diejenigen Schüler verunsichert, die ja sonst auch schon verunsichert sind. Denen will man Sicherheit geben. Also es gibt Schüler, die vielleicht jetzt nicht wissen, was sechsmal sechs gibt und diese müssten es zuerst lernen. Und bei denen ist es beim Argumentieren wichtig, dass sie sechsmal sechs als sechs Sechserstäbchen oder was auch immer man wählt von diesen zehnmal zehn ist dann sechsmal sechs dann eine Quadratzahl vielleicht. Und bei anderen

Kindern, wo das an sich können, dort muss man vielleicht darauf eingehen, dass sie das wieder hinterfragen. Also man muss sehr gut wissen, wo das Kind steht. Ist es in der Phase, in der es noch gar nicht sicher ist, dort darf man es nicht verunsichern. Und dort, wo es eigentlich schon meint es sei sicher, oder etwas oft auch nur auswendig gelernt hat, muss man es quasi wieder ein bisschen verunsichern.

Wie organisierst du denn das Lernen unter den Kindern, wenn du sagst, dass da noch eine grosse Heterogenität vorhanden ist? Trennst du dann stärkere und schwächere in unterschiedlichen Gruppen? Oder durchmischst du die extra?

Also, beides findet statt. Und es ist noch interessant, also ich werfe das jetzt fast in den Topf der Schwarmintelligenz hinein, ich mache die Erfahrung, dass eigentlich ohne grosses Zutun wenn ich eine Gruppe habe, die wirklich miteinander arbeiten kann, wo ich davon ausgehe, dass es nicht nach einer Minute gleich wieder um das Hockey oder etwas anderes geht, sondern dass sie eigentlich dranbleiben am Thema und auch wirklich aufeinander hören, gehen hier andere grundlegende Kompetenzen voraus, wie beispielsweise einander zuhören, einander zwar kritisch zuzuhören, Einwände zu bringen und zurückzufragen und zu sagen ja, ich sehe was du meinst, aber vielleicht hat es einen Fehler drin, denn ich sehe es noch ein bisschen anders, aber schauen wir mal, vielleicht (…). Also man wirft sie im Grunde genommen in einen Pool und dort kommunizieren diese Fischlein miteinander. Und dann merkt man, dass die einen aus verschiedenen Gründen nicht richtig kommunizieren können, weil es persönliche Sachen gibt, weil sie vielleicht auch zu verschieden sind vom Niveau her und so. Und dann muss man halt eingreifen und leichte Lenkungsmassnahmen einleiten. Also, dass man halt diejenigen zusammen einteilt, die besser miteinander können und sich gegenseitig befruchten, im Gegensatz zu denen, die sich gegenseitig daran hindern vorwärts zu kommen.

Anhang 2: Kategoriensystem für die qualitative Datenanalyse der FEMAR-Interviews

Nr.	Abkürzung für Codierung	Kategorienbezeichnung	Definition
1	Unterricht	Aspekte des Argumentationsunterricht	Diese Kategorie umfasst Aussagen zum Unterricht des mathematischen Argumentierens. Die Unterkategorien gliedern die Aussagen zusätzlich.
1.a	Allg. Unterricht	Allg. Aussagen zum Unterricht des mathematischen Argumentierens	Aussagen zu Besonderheiten im Unterricht des mathematischen Argumentierens. Was ist der Lehrperson wichtig im Unterricht zum mathematischen Argumentieren?
1.b	Differenzierung	Differenzierungsmöglichkeiten im Unterricht zum mathematischen Argumentieren	Aussagen zu Differenzierungsmöglichkeiten im Unterricht zum mathematischen Argumentieren. Wie wird im Argumentationsunterricht differenziert?
1.c	Fächer	Unterschied zu anderen Fächern	Aussagen zu Unterschieden des Unterrichts zum mathematischen Argumentieren im Vergleich zum Unterricht (u.a. des Argumentierens) in anderen Fächern.
1.d	Feedback	Peerfeedback	Aussagen zum Peerfeedback. Diese Unterkategorie wurde gesetzt, da das FEMAR-Projekt insbesondere auf das Feedback zielte und dementsprechend einige Aussagen zum Feedback gemacht wurden).
1.e	Herausforderungen Unterricht	Herausforderungen im Unterricht	Aussagen zu Herausforderungen welche der Unterricht zum mathematischen Argumentieren mit sich bringt.

1.f	Kommunikation	Austausch zwischen Peers	Aussagen zum Austausch zwischen den Peers im Unterricht zum mathematischen Argumentieren (Dialog, mündlich/schriftlich, Verhandlung, Diskussion, Kommunikation).
1.g	Mathe	Unterschied zu anderen Inhalten und Schwerpunkten des Mathematikunterrichtes	Aussagen zu Unterschieden des Unterrichts zum mathematischen Argumentieren im Vergleich zum Mathematikunterricht mit anderen Inhalten und Schwerpunkten.
1.h	Partizipation	Partizipationsmöglichkeiten der Schülerinnen und Schüler	Aussagen zur Partizipation und zu Partizipationsmöglichkeiten der Schülerinnen und Schüler.
1.i	Perspektive	Perspektivenwechsel	Aussagen zum Perspektivenwechsel (Einfühlungsvermögen, Theory of Mind etc.).
1.j	Rolle LP	Rolle Lehrperson	Aussagen zur Rolle der Lehrperson im Argumentationsunterricht.
1.k	Sinn	Sinn des Unterrichtes zum mathematischen Argumentieren	Aussagen zum Sinn und Zweck des Unterrichts zum mathematischen Argumentieren. Wozu lernen die Schülerinnen und Schüler das mathematische Argumentieren?
1.l	Sozialformen	Sozialformen	Aussagen zu Sozialformen, welche im Unterricht zum mathematischen Argumentieren eingesetzt werden.
1.m	Zeit	Zeitfaktor	Aussagen zum Zeitfaktor.

2	Faktoren	Fördernde/hemmende Faktoren	Diese Kategorie umfasst Aussagen zu Faktoren, welche das mathematische Argumentieren fördern oder hemmen. Die Unterkategorien gliedern die Aussagen zusätzlich.
2.a	Aufgabe	Aufgabentypen	Aussagen zu unterschiedlichen Aufgabentypen und deren Einfluss auf die Argumentiertätigkeit der Schülerinnen und Schüler. Welche Aufgaben regen besonders zum Argumentieren an? Welche nicht?
2.b	Herausforderungen	Herausforderungen beim Argumentieren	Aussagen zu Herausforderungen für die Schülerinnen und Schüler beim mathematischen Argumentieren. Was erschwert die Argumentiertätigkeit?
2.c	Hilfe	Hilfsmittel fürs Argumentieren	Aussagen zu Hilfsmitteln (Werkzeugen), welche im Unterricht des mathematischen Argumentierens eingesetzt werden. Aussagen, welche Hilfsmittel zur Selbst- und Fremdbeurteilung (Kriterienraster, Rubric etc.) erwähnen, werden teilweise in die Unterkategorien 1.d «Feedback» oder 5.f «Metakognition» eingeordnet. Dies ist dann der Fall, wenn der Fokus der Aussage auf dem Nutzen des Werkzeugs fürs Feedback oder die metakognitive Auseinandersetzung liegt (anstelle des mathematischen Argumentierens).
2.d	Katalysator	Katalysatoren der Argumentiertätigkeit	Aussagen zu Katalysatoren des mathematischen Argumentierens. Gegenstück zu Kategorie «Herausforderungen». Was fördert das mathematische Argumentieren?

			Die verschiedenen Darstellungsformen und -mittel wirken oft auch als Katalysatoren, sie werden allerdings direkt der entsprechenden Kategorie zugewiesen.
2.e	Voraussetzungen	Voraussetzungen für mathematisches Argumentieren	Aussagen zu Voraussetzungen, welche für mathematisches Argumentieren gegeben sein sollten/müssen.
3	Form	Einsatz von Darstellungsformen im Argumentationsunterricht	Diese Kategorie umfasst Aussagen zum Einsatz verschiedener Darstellungsformen (enaktiv, ikonisch, symbolisch, sprachlich) und dem Wechsel zwischen ihnen. Dabei sind die Aussagen eng verknüpft mit jenen der nächsten Kategorie, namentlich jener der Darstellungsmittel.
3.a	Enaktiv	enaktive Darstellungsform	Aussagen zum Einsatz der enaktiven Darstellungsform im Unterricht.
3.b	Ikonisch	ikonische Darstellungsform	Aussagen zum Einsatz der ikonischen Darstellungsform im Unterricht.
3.c	Mündlich	mündlich sprachliche Darstellungsform	Aussagen zum Einsatz der mündlich sprachlichen Darstellungsform im Unterricht.
3.d	Schriftlich	schriftlich sprachliche Darstellungsform	Aussagen zum Einsatz der schriftlich sprachlichen Darstellungsform im Unterricht.
3.e	Sprachlich	sprachlich-symbolische Darstellungsform	Aussagen zum Einsatz der sprachlich-symbolischen Darstellungsformen im Unterricht, in welchen nicht erkennbar ist, ob es sich um die schriftlich oder mündlich sprachliche Form handelt.
3.f	Symbolisch	mathematisch-symbolische Darstellungsform	Aussagen zum Einsatz der mathematisch-symbolischen Darstellungsform im Unterricht.

3.g	Wechsel	Darstellungswechsel	Aussagen zum Einsatz des Darstellungswechsels im Unterricht (wozu, wie, wann etc.).
4	Mittel	Verwendung von Darstellungsmitteln im Zusammenhang mit den Darstellungsformen	Diese Kategorie umfasst Aussagen zu Darstellungsmitteln (bezogen auf Darstellungsformen). Die Unterkategorien gliedern die Aussagen zusätzlich. Falls sich die Aussage zugleich auf Darstellungsform und -mittel bezieht, dann wird sie der Darstellungsform zugeordnet.
4.a	Bild	Bildliche Darstellungsmittel	Aussagen zu bildlichen Darstellungsmitteln, welche beim Einsatz der ikonischen Darstellungsform im Unterricht auftreten (Bilder, Skizzen, Farben etc. als Darstellungsmittel).
4.b	Handlung	Handelnde Darstellungsmittel	Aussagen zu handelnden Darstellungsmitteln, welche beim Einsatz der enaktiven Darstellungsform im Unterricht auftreten.
4.c	Sprache	Sprache als Darstellungsmittel	Aussagen zur mündlichen und schriftlichen Sprache als Darstellungsmittel (z.B. Fachsprache).
4.d	Symbole	Symbolische Darstellungsmittel	Aussagen zu mathesprachlichen Darstellungsmitteln. Die Fachsprache wird zur Unterkategorie 4.c «Sprache» gezählt.
5	Schritte	Argumentationsschritte	Diese Kategorie umfasst Aussagen zu verschiedenen (möglichen) Argumentationsschritten. Die Unterkategorien gliedern die Aussagen zusätzlich.

5.a	Begründen	Begründen	Aussagen zum Argumentationsschritt des Begründens und dazu, was eine Begründung ist und ausmacht.
5.b	Beschreiben	Beschreiben	Aussagen zum Argumentationsschritt des Beschreibens im Sinne davon, die mathematischen Strukturen zu beschreiben.
5.c	Erkennen	Erkennen	Aussagen zum Argumentationsschritt des Erkennens von mathematischen Strukturen (dazu gehört auch: Rechnung erkennen).
5.d	Generalisierung	Generalisierung	Aussagen zum Argumentationsschritt der Generalisierung im Sinne einer Verallgemeinerung (beispielsweise die Übertragung der gefundenen Strukturen und Regeln auf andere Aufgaben desselben Typs).
5.e	Hinterfragen	Hinterfragen	Aussagen zum Argumentationsschritt des Hinterfragens der gefundenen Strukturen (und damit auch des Resultates). Nicht die Hinterfragung der eigenen Vorgehensweise (codiert als «Vorgehen).
5.f	Metakognition	metakognitive Schritte	Aussagen zu metakognitiven Schritten beim Argumentieren (wie gehe ich vor, was mache ich als erstes etc.).
5.g	Verstehen	Verstehen	Aussagen zu den Voraussetzungen, welche für das mathematische Argumentieren gegeben sein müssen (Verstehen der Aufgabe, Sprache etc.).
5.h	Vorgehen	Vorgehen erklären, Schritte erklären	«Metakognitives Hinterfragen» im Sinne von Aussagen zum «Erklären des Vorgehens», «Beschreiben des Rechnungswegs», «Hinterfragen des Lösungswegs» etc.

			Auch «Verstehen, was sie denken» im Sinne von «Verstehen der eigenen Vorgehensweise».
6	Merkmale	Merkmale des Argumentes	Diese Kategorie umfasst Aussagen zu Merkmalen eines mathematischen Argumentes oder des mathematischen Argumentierens. Die Unterkategorien gliedern die Aussagen zusätzlich.
6.a	Individualität	Individualität	Aussagen zum individuellen Aspekt der Argumente und des Argumentierens.
6.b	Nachvollziehbarkeit	Nachvollziehbarkeit	Aussagen zur Bedingung der Nachvollziehbarkeit des Argumentes und des Argumentierens. Diese Kategorie überschneidet sich teilweise mit den Unterkategorien 5.h «Vorgehen» und 1.f «Kommunikation». Hier greift jeweils jene Kategorie, auf welcher der Fokus der Aussage zu liegen scheint.
6.c	Präzision	Präzision	Aussagen zur Bedingung der Präzision beim Argumentieren (im Sinne von «möglichst genau beschreiben» etc.).
6.d	Stichhaltigkeit	Stichhaltigkeit	Aussagen zu Kriterien, die ein Argument stichhaltig machen. «Korrekte Lösung» o.ä. wird auch dieser Kategorie zugeordnet.

7	Irrelevant	Unwichtiges	Diese Kategorie umfasst Aussagen, die den obigen nicht zugeordnet werden können oder für diese Arbeit von keiner besonderen Relevanz sind.

7.a	Aussage	Aussagen	Aussagen der Interviewten und der Interviewenden, die nicht relevant sind (Gestammel etc.).
7.c	Frage	Fragen	Fragen der Interviewenden und Nachfragen der Interviewten.
7.d	Nicht verständlich	Aussagen, welche unverständlich sind	Die Aussage widerspricht sich in sich oder ähnlich, könnte allerdings für die Arbeit trotzdem relevant sein.
7.e	Unabhängig	Nicht im Zusammenhang mit Fragestellungen der Arbeit, aber dennoch interessant	Aussagen, die für die Arbeit nicht relevant sind, aber dennoch Gehalt haben.

Anhang 3: Hauptaussagen der interviewten Lehrpersonen

Kategorie	Hauptaussagen
Unterricht	
Allg. Unterricht	» Der Unterricht ist abwechslungsreicher (Methodenvielfalt), offener (Schülerinnen und Schüler agieren miteinander, nicht frontal) und lauter (kommt auf Klasse an).
Differenzierung	» Differenzierung vor allem durch homogene Gruppen (natürliche Differenzierung in der Diskussion)
Fächer	» Math. Arg. ist stärker kriterienbezogen » Argumentieren kommt auch in anderen Fächern vor, Unterricht nicht sehr anders
Feedback	» Anhand von Kriterienraster » Wichtig » Mündlich und schriftlich (Hineinschreiben in Plakate)
Herausforderungen Unterricht	» Niveaudifferenzen (von Aufgaben nicht verstehen bis hin zu total selbständig lösen) » Sprachlichkeit: Vorteil für sprachlich begabte Schülerinnen und Schüler, Nachteil für andere (verstehen teilw. die Aufgaben nicht) » Unterschiedliche Arbeitstempi » Rechenprobleme blockieren den Unterricht » «Schüelerle» (Lehrperson steht stark im Zentrum) » Begrifflichkeiten (Fachsprache) » Zeit, Effizienz (LP befürchten, dass Schülerinnen und Schüler herumtrödeln, weshalb Schülerinnen und Schüler wiederum den Sinn des Arg. nicht mehr sehen) » Den Sinn erkennen (Weshalb reicht die korrekte Lösung nicht? / Weniger Aufgaben in derselben Zeit) » Begründungen zu überarbeiten stösst auf Widerstand » Unterrichtsstruktur (Wann in welcher Sozialform etc.)

	» Schnelle Rückmeldung (Verifikation oder Falsifikation) » Welches Kriterium ist stärker/am stärksten zu gewichten? (Skizze, Begründung, korrektes Resultat) » Beurteilung » Handelnd (enaktiv) mit Material ist schwierig beim math. Arg.
Kommunikation	» Behaupten und Gegenbehaupten » Vorgehen und Lösung sprachlich aufzeigen » Gemeinsam weiterentwickeln («-stricken») » Argumentation als Dialog » Vergleichen » Verhandeln: Die eigene Meinung als die Richtige verkaufen (Ehrgeiz, «Spiel») » Das Verhandeln, die Kommunikation macht den Argumentationsunterricht spannend » Diskussion: niemand hat recht, es ist «open end» » Auf die Argumente der anderen eingehen » Gegenseitig helfen
Mathe	» Kommunikativer, lauter » Mehr Gruppenarbeiten, Poster etc. » Nicht Lösen nach Schema, sondern darüber reden » Schwieriger, den Sinn zu vermitteln » Gleich wie sonst » Weniger Aufgaben in derselben Zeit » Sonst werden Aufgaben viel oberflächlicher gelöst » Beim math. Arg. sind Schülerinnen und Schüler nicht gleich stark auf unmittelbares LP-Feedback angewiesen (durch Austausch mit anderen) » Kinder «nimmt es Wunder», ob sie auf dem richtigen Weg sind, sie fragen öfter nach

	» Normale Mathe: Automatisierung, schneller werden, Fehler vermeiden und effizient arbeiten. Argumentieren und Begründen: plus sprachliche Komponente » Fragen und Antworten extrem auf sprachlicher Ebene » Mehr Schwierigkeiten, die Aufgaben zu verstehen » Es geht nicht so stark darum, ob das Resultat richtig oder falsch ist » Es gibt nicht nur eine Lösung » Offene Aufgaben mit verschiedenen Lösungsmöglichkeiten, weiterdenken, selbständig denken » Es gibt mehr Niveaudifferenzen [treten stärker hervor?] » Es geht über das richtige Resultat hinaus: Warum? » Es wird häufiger das Darstellungsmittel gewechselt als sonst
Partizipation	» Jedes Kind kann sich auf seine Weise einbringen » Einige Kinder argumentieren gerne (und gut), andere nicht gerne (und haben Mühe)
Perspektive	» Stärkere Schülerinnen und Schüler helfen (vielleicht funktioniert ein anderer Ansatz besser, als jener der LP) » Können wir überhaupt vergleichen, was wir gemacht haben? » Andere Ansätze/Varianten/Ideen erkennen und nachvollziehen
Rolle LP	» Anregungen, Anstösse, Inputs & Tipps geben, Fragen stellen » Wenig Kontrolle möglich, man kann nicht überall sein » Zurückhaltung, Irrweg aushalten, nicht zu viel vorwegnehmen, nicht beeinflussen » Gruppe unterstützen oder einzelne Schülerinnen und Schüler » Hartnäckiges Nachfragen, um Schülerinnen und Schüler zum Argumentieren zu bringen » Schülerinnen und Schüler ermuntern, ihre Gedanken aufzuschreiben » Begleiten, bestätigen » Mehr Präsenz erfordert, intensiver für LP » Geeignete Aufgaben stellen, Einstiege

	» Grüppchenweise etwas (noch einmal) erklären » Zeit und Möglichkeit zur Vielfalt geben » Aufzeigen, dass verschiedene Wege möglich sind » Am Anfang stark leiten » Antworten genauer ansehen
Sinn	» Für das spätere Berufsleben ist Nachvollziehbarkeit auch wichtig » Es gibt auch im Berufsleben später viele offene Aufgaben » Auch falsches Ergebnis begründen, weil dann wenigstens Teil der Aufgabe erfüllt » Gerade bei schwierigeren Aufgaben ist dies später wichtig, jetzt ist es noch möglich, «einfach zu rechnen», später nicht mehr » Generalisierung » Selbstüberprüfung und sorgfältiges Arbeiten » Mit einer anderen Argumentation kann auch eine andere Lösung stimmen » Auch in anderen Fächern wird argumentiert » Bewusstes Nachdenken über Lösungsweg » Schülerinnen und Schüler sollen immer die Lösungswege aufschreiben, das «Warum» bewusst machen
Sozialformen	» Gegenseitig helfen » Abwechseln zwischen homogen und heterogen, GA, PA, EA, PL » Gruppenpuzzle » Lerntempo-Duett » Placemat (Vorteil: auch Fragmente sind okay, es muss kein fertiger Lösungsweg da sein) » Kooperative Lernformen (weil Kommunikation im Fokus): Think-Pair-Share, DAV » Unterscheidung von Methode (Placemat etc.) und Unterrichtsform (GA, PA, EA etc.) » Gefahr, zu weit und zu lange zu diskutieren » Einzelne Schülerinnen und Schüler stellen der Klasse vor

	» Klassenzimmer, Gruppenraum, Gang etc.
Zeit	» Investierte Unterrichtszeit lohnt sich » Es wird (zu) viel Zeit benötigt (Zeit auch aufgrund des nahenden Übertritts nicht vorhanden) » Wenige Aufgaben in viel Zeit » Zu wenig Zeit für Fehlversuche » Zusätzliche Inputs zu Rechenschwierigkeiten erfordern ebenfalls Zeit » Argumentieren wird nur punktuell eingesetzt, um anderen Stoff nicht zu vernachlässigen
Faktoren	
Aufgabe	» Konfrontation mit Aufgabe » Eine Aufgabe, die das Argumentieren anregt » Das Niveau muss für die Schülerinnen und Schüler stimmen » Aufgaben, die unterschiedliche Lösungen zulassen (auch, um Austausch zu ermöglichen) » Aufgabe muss mathematisch bearbeitbar sein
Herausforderungen	» Schülerinnen und Schüler argumentieren nicht so gerne, weil es mehr Zeit braucht » Rechenprobleme » Math. Arg. setzt viele andere Kompetenzen und Inhalte voraus » Fokus zu stark auf der Lösung, die Begründung wird vergessen » Für die Schülerinnen und Schüler ist Mathe = rechnen und korrekte Lösung (nicht «Sätze schreiben») » Das «Selbstverständliche» ist schwer auseinander zu nehmen und zu begründen (v.a. für stärkere Schülerinnen und Schüler) » Die Nachvollziehbarkeit fällt den Schülerinnen und Schülern schwer » Viele Schritte » Gedanken aufs Papier bringen (Aufschreiben, Skizzen, Farben) » Sprachliche Hürden (rezeptiv und produktiv), Fachsprache

	» Ungewohnt, dass die Sprache so im Fokus steht » Motivation fehlt » Darstellungswechsel von und zu symbolisch fällt den Schülerinnen und Schülern schwer » Mehr schreiben, als nur den Antwortsatz umzuschreiben » Filtern: Was ist wichtig? Was ist mathematisch relevant? Was ist die Kernaussage dieser Aufgabe, was ist nur Beilage? » Präzision als Herausforderung » Ohne Bestätigung (auch zwischendurch) durch LP würde das math. Arg. sehr lange dauern » Offene Struktur, Weg und Ziel sind normalerweise klar vorgegeben, hier ist der Weg das Ziel » Es gibt nicht nur eine Lösung » Das mathematische Argumentieren wird als Extraaufwand gesehen » Die unsicheren Schülerinnen und Schüler wollen eigentlich bestätigt werden (durch korrekte Lösung), sie werden aber noch mehr verunsichert durch die Aufforderung zum Argumentieren » Gruppeneinteilungen müssen bedacht vorgenommen werden
Hilfe	» Rubric » Placemat » Austausch » Plakat mit Merkmalen eines guten Arguments (als Ritual) » Merkzettel mit Merkmalen; Merkzettel mit Fachbegriffen (selbst geschrieben oder von LP erstellt und abgegeben) » Darstellungsmittel » Lösungsbeispiele besprechen » Schritte vorgeben (mit Rubric, Raster oder auch sonst) » Lösung vorstellen/gemeinsam laut lesen » Ikonische Darstellung der Aufgabe
Katalysator	» Austausch mit anderen

	» Es braucht gute (überlegte, geplante) Gruppen » Viel Platz, um zu arbeiten (leeres Blatt) » Es braucht einen Teil in EA vor der Gruppenphase » Darstellung » Einige Kinder argumentieren gerne (Motivation als Katalysator) » Aha-Erlebnisse » Überfachliche Kompetenzen (zuhören, aufeinander eingehen etc.) » Unterschiedliche Lösungswege und Resultate regen zum Argumentieren an
Voraussetzungen	» Grundvorstellungen (mit Stäbchen, Klötzchen etc.) » Fachsprache » Fähigkeit zum Darstellungswechsel » Aufgabe muss verstanden werden (sprachlich und kognitiv) » Einführung in einen bestimmten Aufgabentyp, in eine bestimmte Aufgabe » Vorwissen (Sachwissen und math. Wissen)
Form	
Enaktiv	» Handelnd (enaktiv) mit Material ist schwierig beim math. Arg.
Ikonisch	» Auf Hunderterfeld einzeichnen, um Struktur zu erkennen » Aufzeichnen » Reihenfolge, schrittweise » Rückt in den Vordergrund (Skizzen etc.) » Soll math. Bezug haben
Mündlich	» Vorgehen und Lösung sprachlich aufzeigen » Sprache muss in den Vordergrund gerückt werden, das passiert indem über Mathe gesprochen wird » Nicht nur auf dem Papier, auch mündlich » Schülerinnen und Schüler sollen ihre Gedanken verbalisieren, um sie später verschriftlichen zu können

	» Es läuft mehr mündlich, da das schriftliche Argumentieren im Mathebuch nicht hervorgehoben » Es wird viel geredet (positiv) » Idee: mündliche Prüfungen, weil im Gespräch mehr herausgeholt werden könnte
Schriftlich	» Die eigenen Gedanken aufzuschreiben gehört zum Argumentieren » Ist zwar im Mathebuch drin, jedoch das «Stiefmütterchen» » Lösungswege und Ideen schriftlich festhalten (ähnlich wie im Reisetagebuch)
Sprachlich	» Fragen und Antworten extrem auf sprachlicher Ebene » Nicht nur Rechnungswege aufschreiben, sondern auch in Worte fassen » Argumentieren als «miteinander über Mathe sprechen», verbalisieren der Gedankengänge » Sprache im Vordergrund » Kooperatives Lernen, im Dialog » Aufgabe konkret formulieren, nicht nur Ergebnis hinschreiben
Symbolisch	» Aufgeschriebene Rechnung
Wechsel	» Nicht nur sprachlich austauschen und diskutieren, sondern auch als Skizze etc. aufzeigen » Wechsel von mündlich auf schriftlich » Es wird häufiger das Darstellungsmittel gewechselt als sonst » Von der «schwierigen mathematischen Logik» zurückführen auf einfache Darstellung, z.B. Skizze » Wandel von Text zu Rechnung » Verbindung herstellen zwischen Gedanken und dem, was ich aufschreibe
Mittel	
Bild	» Muss Erkenntnisse/Zusammenhänge aufzeigen, nicht nur Glace zeichnen » Skizze, Bild, Pfeile, Farben, unterstreichen, Stellentafel, Plättchen, Tabelle, Übersichten, Beispiele, Zeichnung
Handlung	» Ziffernkarten

	» Mit Händen und Füssen
Sprache	» Vorgehen und Lösung sprachlich aufzeigen » Fragen und Antworten extrem auf sprachlicher Ebene » Mathesprache, Fachsprache, Vokabular (zusätzliche Sprache neben der deutschen) » «Die Kunst ist, Mathematik mit genauen Begriffen erklären zu können.» » Weil-Sätze
Symbole	» Rechnung lösen » Resultat aufschreiben
Schritte	
Begründen	» Begründen = Warum gehen die Schülerinnen und Schüler so vor? » Warum stimmt das Resultat? » Begründung muss stichhaltig sein » Begründung nach Kriterien » Mit Begriffen » Lösungswege begründen; begründen, was ich gemacht habe » Vermutungen erläutern » Vorgehen begründen » Nicht nur erzählen, was ich gemacht habe, sondern weshalb » Schülerinnen und Schüler denken, Begründung = Resultat und Frage beantwortet. LP: Begründung = wieso ist das Resultat korrekt? » Was habe ich mir überlegt? » Warum ist mein Weg richtig und nicht der andere? » Ergebnis bestätigen » Auch Irrwege lassen sich begründen » Nachvollziehbarkeit » Wie und weshalb bin ich auf das Resultat gekommen? » Beim Argumentieren ist der Prozess des Begründens das Wichtigste

	» Beweisen und argumentieren mithilfe von Zahlen = math. Argumentieren » Beim Begründen muss man sich an der Frage orientieren, aber über sie hinausdenken
Beschreiben	» Das genaue Beschreiben eines Resultates = Teil des Argumentierens » Vorgehen und Struktur beschreiben
Erkennen	» Begriffe erkennen und verstehen » Struktur erkennen (z.B. Stellenwert), Systeme dahinter erkennen » Erkennen, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt – je nachdem, wie die Aufgabe ausgelegt wird » Argumentieren geht in die Tiefe, ins «alles wissen», nicht nur ins «Resultate finden» » Von der Aufgabe zur Rechnung zu kommen, ist einfacher als von Text zu Rechnung » Wenn die Schülerinnen und Schüler die Rechnung erkannt haben, dann geht es automatisch » Das Wesentliche aus einer Aufgabe herausnehmen » Hinter dem Argumentieren steht das Verstehen: Habe ich das System erkannt?
Generalisierung	» Durch sprachliche Begründung (ich kann dazu jede beliebige Zahl nehmen)
Hinterfragen	» Argumentieren ist eine Verunsicherung der Logik und gleichzeitig eine Anwendung der Logik » Kann das Resultat wirklich stimmen? Kann das sein? Macht das überhaupt Sinn? Ist das realistisch? » Auseinandersetzung mit den eigenen mathematischen Vorstellungen » Dinge im laufenden Unterricht hinterfragen » Unterschiedliche Vorstellungen (zweimal drei Kinder vs. zweimal drei Erwachsene: es sind ja alles Menschen? etc.) » Es sollen vor allem Kinder hinterfragt werden, die sich sicher sind. Unsichere Kinder sollen nicht weiter verunsichert werden.
Metakognition	» Über Lösungswege nachdenken, in den Prozess reinkommen

	» Wie gehe ich vor, welche Überlegungen muss ich anstellen? Klar überlegtes Vorgehen » Die Lösung bewusst begründen » Nachvollziehbarkeit überdenken » Selbsteinschätzung durch Rubric » Was unterscheidet eine Antwort vom Vorgehen? » Wie gehe ich an eine Aufgabe heran? » Beim Lösen ein System dahinter haben » Aufbau des math. Argumentieren mitgeben
Verstehen	» Hinter dem Argumentieren steht das Verstehen: Habe ich das System erkannt? » Eine Skizze machen = Aufgabe verstehen » Mathematisches Argumentieren = Aufgabe verstehen » Mit der Aufgabe auseinandersetzen erfordert viel Verständnis » Begriffe verstehen » Aufgabe verstehen » Aufgabentyp verstehen » Fächerübergreifend (Deutsch) » Sprachliche Kompetenzen sind die Grundlage des Verstehens » Müssen Aufgabe lösen können, um sie zu verstehen » Verständnis wird für Rezeption und Produktion benötigt
Vorgehen	» Was habe ich gemacht? » Wie bin ich zum Resultat gekommen? » Was habe ich überlegt? » Zusammenfassen » Gedanken festhalten » Lösungsweg reflektieren
Merkmale	
Individualität	» Unterschiedliche Lösungswege

	» Eigene Lösungswege » Auch ungewöhnliche LW » EA fördert Individualität » Alle sollen zu Wort kommen
Nachvollziehbarkeit	» Übersichtliche Darstellung » Rechnungsweg aufzeigen » Um nachvollziehbar zu sein, muss zuerst selbst verstanden werden » Zwischenüberlegungen » Transparenz, es soll klar und offen ersichtlich sein, was Schülerinnen und Schüler gemacht haben » Nicht mit kurzen, knappen Stichworten » Lösung, die nicht nur das Resultat enthält » Kein Ausradieren » Alle verwenden dasselbe Vokabular (Fachsprache) » Die andere Person soll verstehen, wie vorgegangen wurde
Präzision	» Argumentationsstrang wird klar verbalisiert » Nur das Wichtige festhalten, nicht ausschweifen » Umso schwächer die Schülerinnen und Schüler, desto mehr glauben sie, dass Quantität (Textmenge und -länge) = Qualität » Auf den Punkt gebracht (nicht hoffen, dass irgendeiner von diesen vielen Begriffen der Richtige ist) » Die konkrete Aussage erkennen » Das treffende, klare Formulieren ist wichtiger als der eigentliche Weg
Stichhaltigkeit	» Zeigen, dass das dahinterliegende System erkannt wurde » Korrekte Lösung » Argumente müssen nicht zwingend aus der Mathematik stammen » Es gibt kein Richtig und Falsch (ausser bei der Lösung) » Kann auch eine Schätzaufgabe sein » Bilder und Zeichnungen