

# PH Zug

## **Workshop: Heureka! Ich hab's geschafft!**

Problemlösen lernen im Mathematikunterricht – nicht nur (aber auch) für begabte Lernende!

Symposium Begabung

19. März 2016

Priska Fischer Portmann

Dozentin Fachdidaktik Mathematik, Fachschaftsleitung, Mentorin

Pädagogische Hochschule Zug



## Heureka! Ich hab's geschafft! Problemlösen lernen im Mathematikunterricht – nicht nur (aber auch) für begabte Lernende!

Begabte Lernende sollen mit anspruchsvollen Aufgabenstellungen herausgefordert werden. Aber manchmal sind gerade diese Schülerinnen und Schüler nicht bereit, beharrlich und angestrengt im Lösungsprozess zu verweilen. Problemlösen kann man lernen! Und jedes „Heureka! Ich hab's!“ stärkt die Anstrengungsbereitschaft sich erneut auf anspruchsvolle Aufgabenstellungen einzulassen.

Im Workshop wird an konkreten Aufgabenstellungen aufgezeigt und erfahrbar gemacht, welche Strategien und Hilfsmittel den Problemlöseprozess unterstützen und wie Lernende bei der Entwicklung ihrer Problemlösekompetenz unterstützt werden können.

Zielstufe: 3.-6. Klasse

## Inhalte

- Beim Lösen von mathematischen Problemstellungen das eigene Problemlöseverhalten reflektieren
- Strategien (Heuristiken) zum Umgang mit mathematischen Problemen bewusst werden/kennen lernen
- Ansätze zur Förderung der «Entwicklung der Problemlösekompetenz» im Unterricht kennen lernen

## Definition «Problem»

Ein Problem (gr. πρόβλημα *próblema* das Vorgeworfene, das Vorgelegte, „das, was [zur Lösung] vorgelegt wurde“), auch Problematik, nennt man eine Aufgabe oder Streitfrage, deren Lösung mit Schwierigkeiten verbunden ist.

Probleme stellen Hindernisse dar, die überwunden oder umgangen werden müssen, um von einer unbefriedigenden Ausgangssituation in eine befriedigendere Zielsituation zu gelangen. (Wikipedia)

**Aber:**

**Nicht für alle Menschen bilden die gleichen Aufgabenstellungen  
Hindernisse!**

## Struktur eines Problems



## Routine-Aufgabe

- Entschlüsselbare Aufgabe eines best. Typs
- Abruf best. Lösungsprozedur
- Erfolg auch ohne Verständnis möglich
- Provoziert i.A. nicht zum Weiterdenken, Fortspinnen; wirkt geschlossen

## Problem-Aufgabe

- Barriere verhindert Entschlüsseln, Aufgabe ist offen
- Suche nach Lösungsweg notwendig
- Ohne Verständnis kein Erfolg möglich
- Provoziert zum Weiterdenken, Variieren, Ausbauen; wirkt offen

MA.1  
B

Zahl und Variable  
Erforschen und Argumentieren

1. Die Schülerinnen und Schüler können Zahl- und Operationsbeziehungen sowie arithmetische Muster erforschen und Erkenntnisse austauschen.

Querverweise  
EZ - Sprache und Kommunikation

2	e	» können Operationen systematisch variieren, mit vertrauten Aufgaben vergleichen, Annahmen treffen, Lösungsansätze austauschen.
	f	» lassen sich auf offene Aufgaben ein, erörtern Lösungsalternativen und suchen Lösungsalternativen.
	g	» können operative Beziehungen zwischen natürlichen Zahlen erforschen und beschreiben (z.B. die Differenz von 2 Umkehrzahlen ist ein Vielfaches von 9: $41 - 14 = 27$ ; $83 - 38 = 45$ ).
	h	» können heuristische Strategien verwenden: ausprobieren, Beispiele suchen, Analogien bilden, Regelmässigkeiten untersuchen, Annahmen treffen, Lösungsansätze austauschen. » können systematische Aufgabenfolgen beschreiben (z.B. auf einer Zahlentafel 5 Zahlen mit einem konstanten Abstand berechnen. Die Figur um eine Einheit vergrößern).
	i	» können heuristische Strategien verwenden: durch Fragen die Problemstellung klären, systematisch variieren, mit vertrauten Aufgaben vergleichen, Annahmen treffen, Lösungsansätze austauschen. » können Beziehungen zwischen rationalen Zahlen erforschen und beschreiben (z.B. die Abstände zwischen den Stammbrüchen $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$ sind kleiner als die Abstände zwischen den Stammbrüchen $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$ ). » können arithmetische Zusammenhänge zwischen Stellenwerten und Operationen erforschen und Beobachtungen festhalten (z.B. $10 : 9 = 1 \text{ R}1$ , $100 : 9 = 11 \text{ R}1$ , $1'000 : 9 = \dots$ ).

**Grundanspruch:**

Können heuristische Strategien verwenden: ausprobieren, Beispiele suchen, Analogien bilden, Regelmässigkeiten untersuchen, Annahmen treffen, Vermutungen formulieren

**Erweiterte Anforderungen:**

Können heuristische Strategien verwenden: durch Fragen die Problemstellung klären, systematisch variieren, mit vertrauten Aufgaben vergleichen, Annahmen treffen, Lösungsansätze austauschen

## Problemlösen konkret

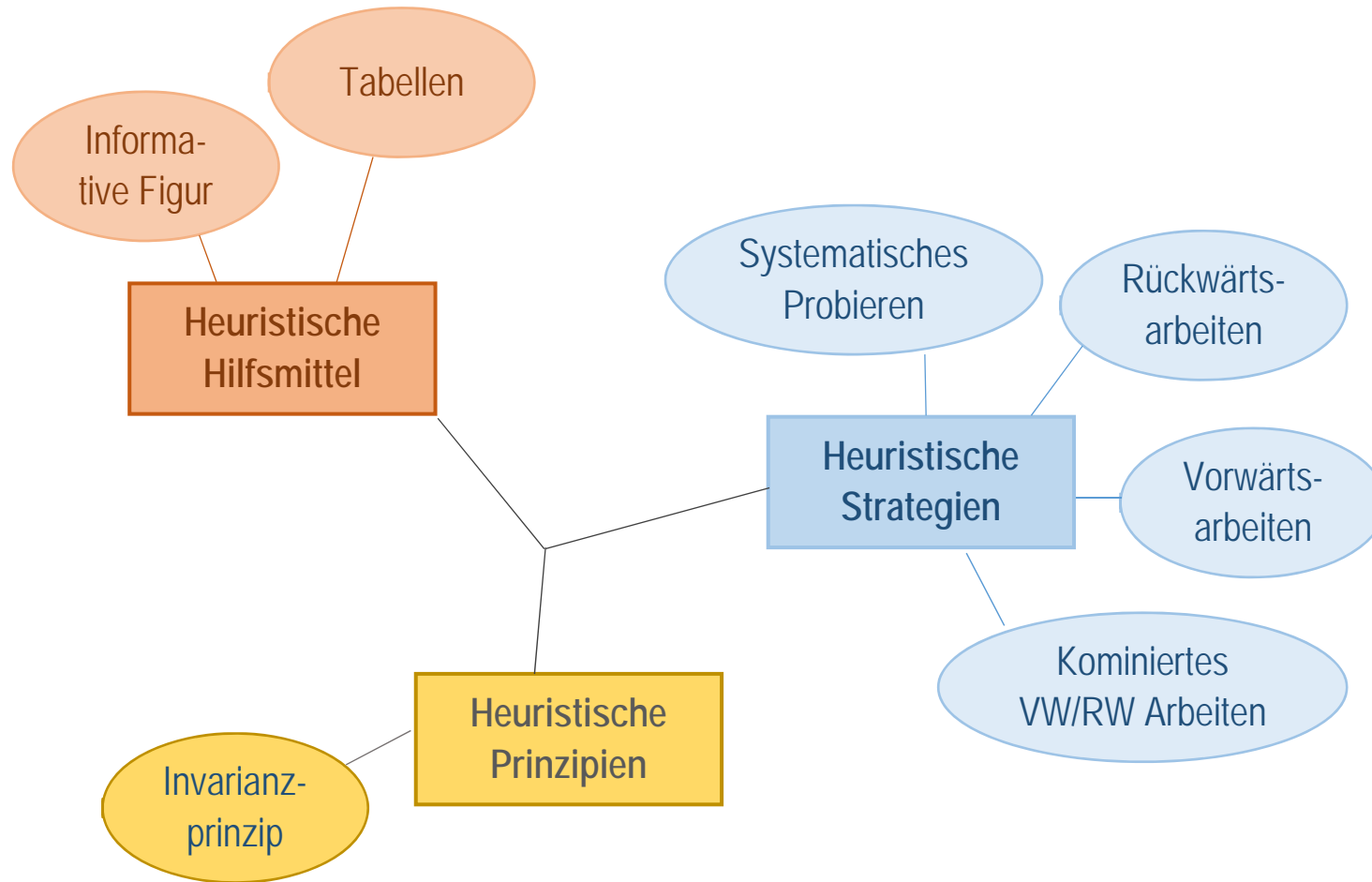
- Lösen Sie eine der aufliegenden Aufgabenstellungen!
- Zeigen Sie Ihren Lösungsweg auf! (Denkschritte notieren)
  
- **Welche Strategien und welche Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren waren hilfreich?**
- **Welche Lösungswege wären auch noch möglich?**



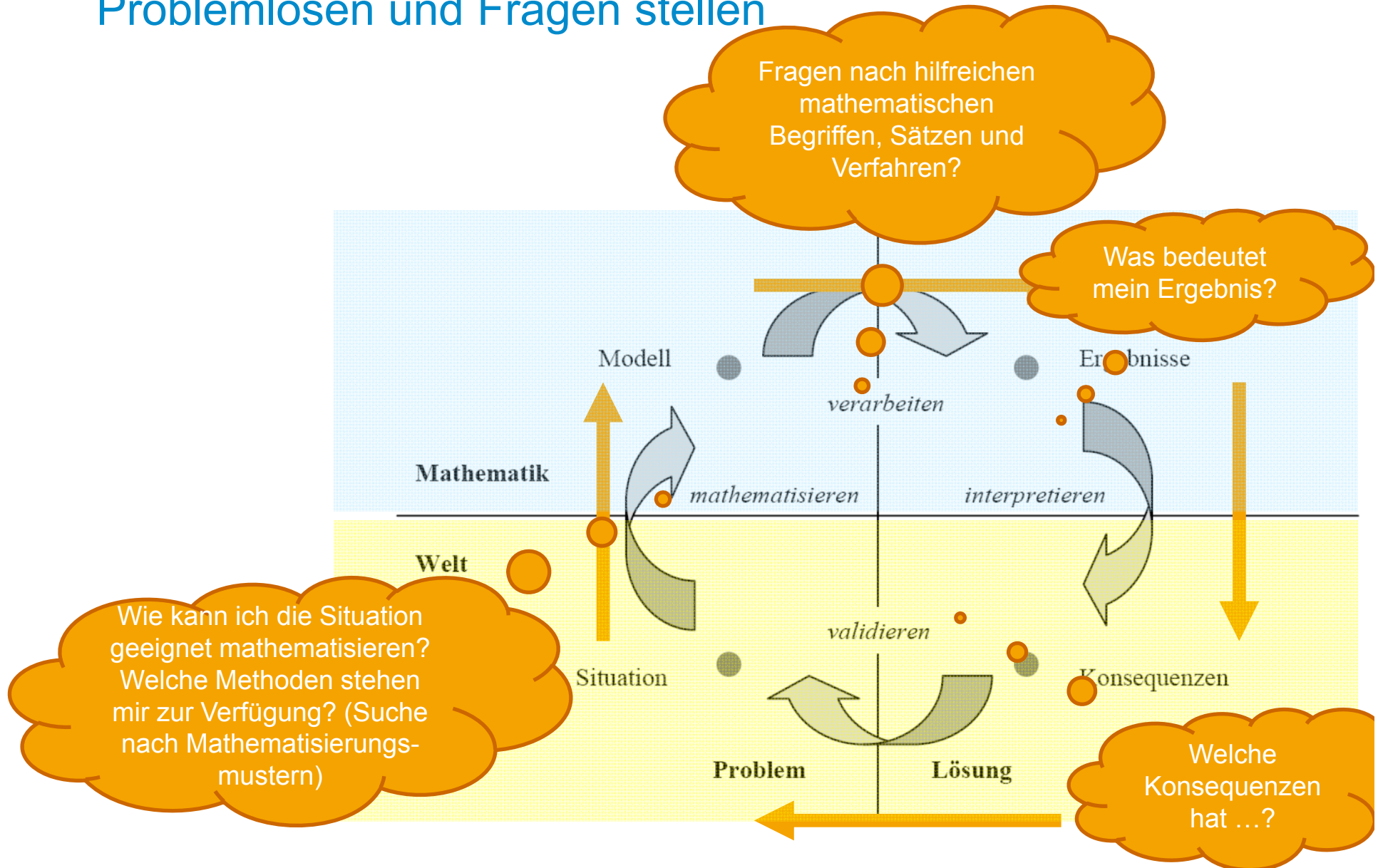
# Heurismen

FOKUS: PRIMARSTUFE

Problemlösenlernen lässt sich definieren als das Kennen- und Anwendenlernen von **Methoden und Techniken** zum Lösen individuell schwieriger Aufgaben. (Bruder&Collet 2011, S.14)



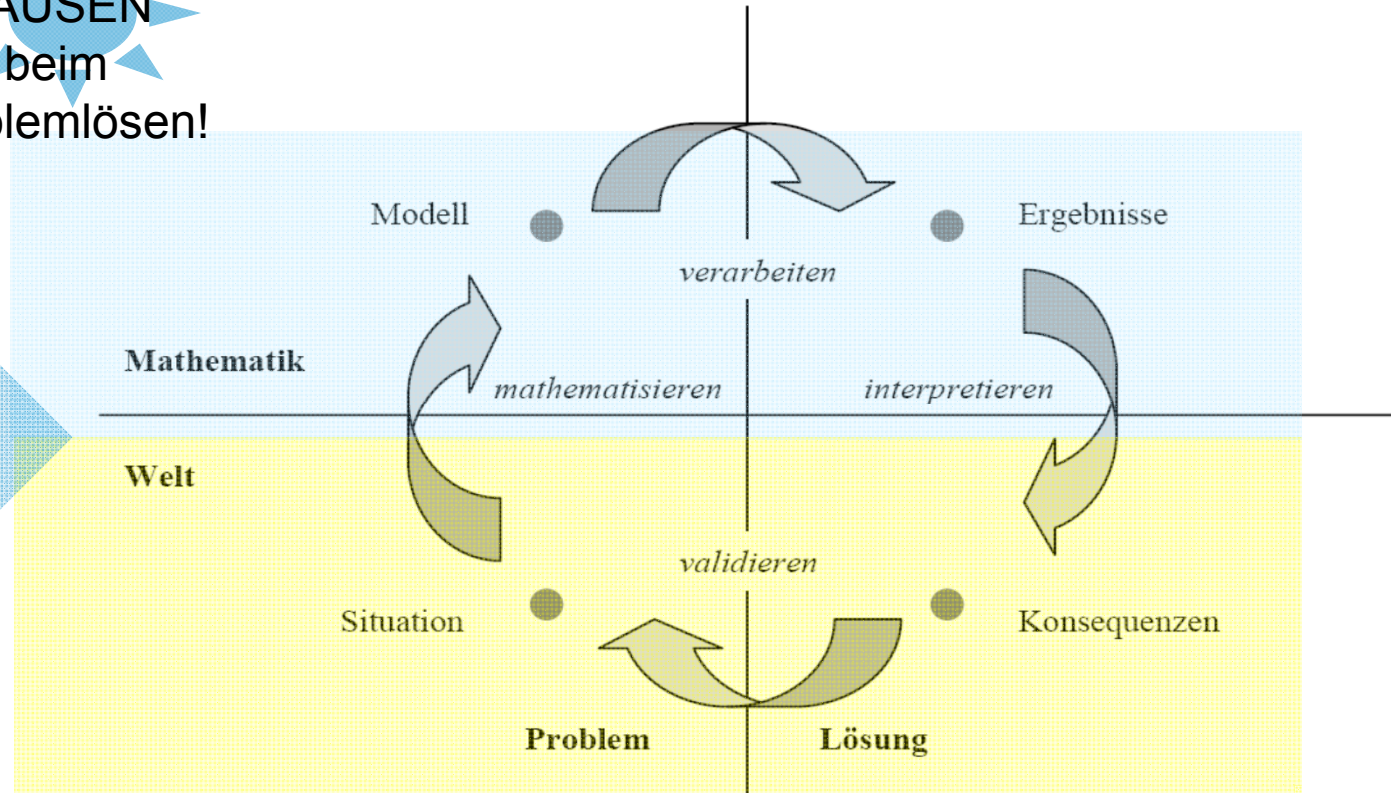
# Problemlösen und Fragen stellen



# Modellbildungsprozess

Rolle der  
**PAUSEN**  
beim  
Problemlösen!

Texterschliessungs-  
Strategien  
Bearbeitungshilfen



Modellbildungsprozess beim Mathematisieren

## Unterrichtskonzept zum Problemlösen

- 1) **Gewöhnen** an heuristische Methoden oder Techniken durch Reflexion im Anschluss an eine Aufgabenlösung:  
*Was hat uns geholfen, die Aufgabe zu lösen?*
- 2) **Bewusstmachen** einer speziellen Methode oder Technik anhand eines markanten Beispiels, z.B. „7-Tore-Aufgabe“ für Rückwärtsarbeiten
- 3) Bewusste **Übungsphasen** mit Beispielen unterschiedlicher Schwierigkeit zur selbstständigen Bearbeitung.
- 4) Schrittweise bewusste Kontexterweiterung für den Einsatz der Heuristiken und zunehmend unterbewusste Nutzung.

Bruder 2003, 2014

# Schwierigkeitsparameter von Aufgaben

(I)

## **Formalisierungsgrad**

- Wie kompliziert ist es, die gestellte Aufgabe zu erfassen und zu verstehen?
- Wie aufwändig ist der Prozess der Übersetzung in die math. Fachsprache und Symbolik?
- Sind Kenntnisse aus anderen Unterrichtsfächern erforderlich? (Weltwissen)

## **Komplexitätsgrad**

- Welche geistigen Handlungen sind in welcher Verknüpfung erforderlich? (Kriterium der Mehrschrittigkeit)
- In welchem Umfang kann auf bekannte Grundaufgaben zurückgeführt werden?
- Welche Strategien können in welchem Verknüpfungsgrad eingesetzt werden?

Bruder&Collet 2011, S. 13

## Schwierigkeitsparameter von Aufgaben

(II)

### **Bekanntheitsgrad**

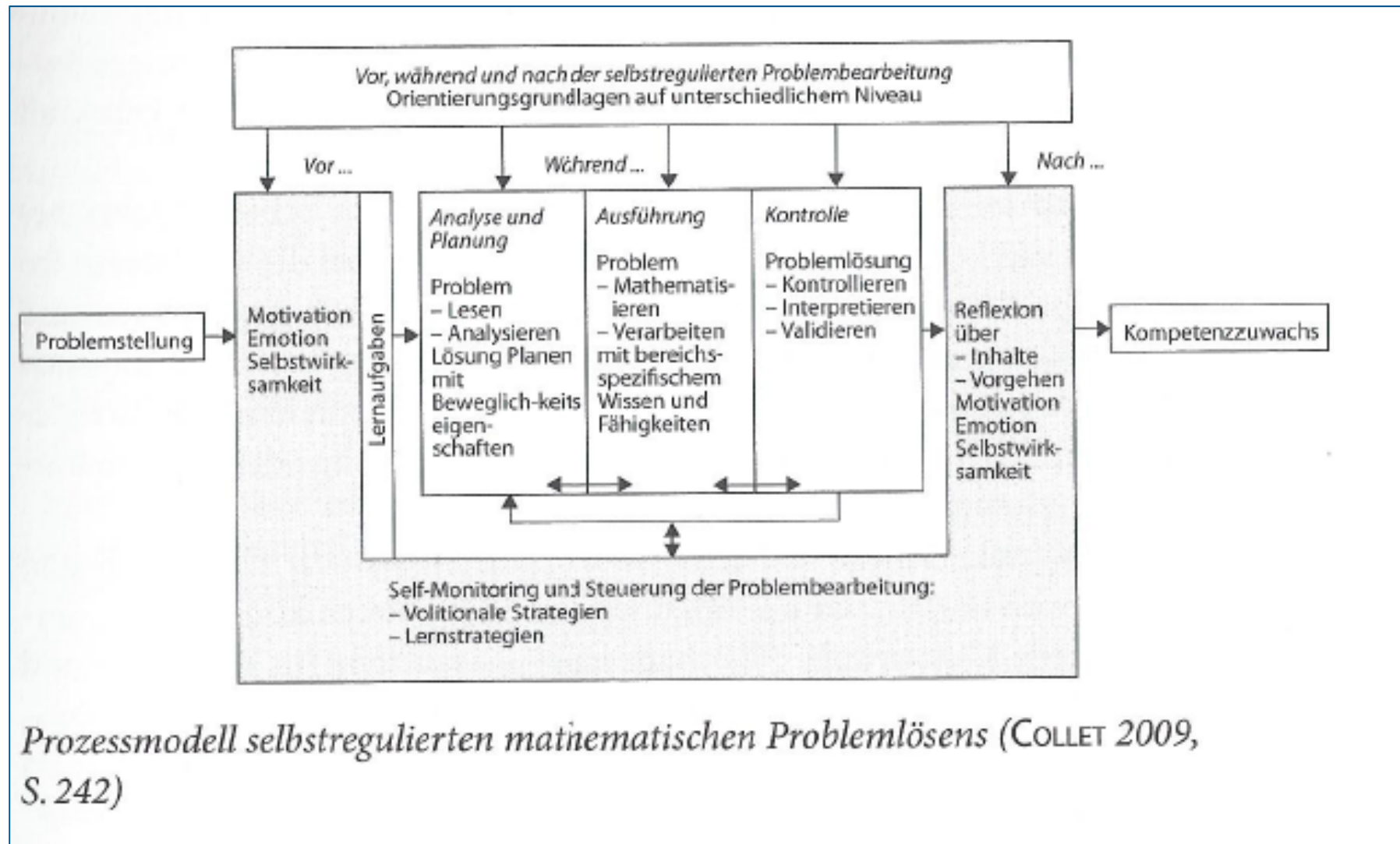
- Wurden schon ähnliche Aufgaben gelöst?
- In welchem Umfang sind die Kenntnisse verfügbar, die für das Finden einer Lösungsidee und zum Darstellen der Lösung erforderlich sind?

### **Ausführungsaufwand**

- Wie hoch ist der formale Rechenaufwand und damit ggf. auch die Fehleranfälligkeit?
- Ist die Aufgabe lösbar?
- Welche Fallstricke stecken in der Interpretation der mathematischen Ergebnisse?

Bruder&Collet 2011, S. 13

## Prozessmodell Problemlösen



Prozessmodell selbstregulierten mathematischen Problemlösens (COLLET 2009, S. 242)

Bruder&Collet 2011, S. 169

PH Zug

## Heureka – ich hab's!

Nebeneffekte gelungener Problemlöseprozesse:

Nächstes Problem wird mutiger und zuversichtlicher angegangen

**Erfolgserlebnisse beim mathematischen Problemlösen (wie auch im Alltag) können also eine beachtliche Verstärkerfunktion für die Lernmotivation und das Selbstwertgefühl haben.**

Bruder&Collet 2011, S. 35



## Literatur mit Aufgabensammlungen zum Problem lösen (I)

Eine Auswahl....

- Bardy, Peter (2007). Mathematisch begabte Grundschul Kinder. Diagnostik und Förderung. München: Elsevier GmbH.
- Bardy, P., Hrzàn, J. (2006). Aufgaben für kleine Mathematiker. Mit ausführlichen Lösungen und didaktischen Hinweisen. Köln: Aulis
- Beutelspacher, A., Wagner, M. (2012). Warum Kühe gern im Halbkreis grasen ... und andere mathematische Klobeleien. Freiburg im Breisgau: Herder
- Griesbeck, R., Fliegner, N.(2008). Mathematricks. Wie man Eltern und Lehrer reinlegt und alle dabei schlauer werden! Köln: Boje Verlag GmbH.
- Schnabel, J., Trapp, A. (2012). Problemlösendes Denken im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen – Musteraufgaben – Materialien. 1.-4. Klasse. Donauwörth: AAP Lehrerfachverlage GmbH

## Literatur mit Aufgabensammlungen zum Problem lösen (II)

- Simon, Martin (2007). Das Denkspiele Riesenbuch. 555 Denkspiele von kinderleicht bis teuflisch schwer. Poing: Franzis Verlag GmbH.
- Wälti-Scolari Beat (2001). Problemlösen macht Schule. Anregungen zum Mathematikunterricht auf der Sekundarstufe 1. Zug: Klett und Balmer

### Quellen im Netz:

- Themenheft Mathematik «Problemlösen». Volksschule I+II. Bundesinstitut Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens. Verfügbar unter: <https://www.bifie.at/node/2203>
- Siehe auch: Aufgabensammlungen in den Archiven der Mathematikwettbewerbe z.B. «Känguru der Mathematik»

## Literatur (Grundlagen)

Bruder, Regina (2014). Fachdidaktisch und lerntheoretisch begründete Modelle zum Lehren und Erlernen von Heuristiken im Mathematikunterricht. In: F. Heinrich, St. Juskowiak (Hrsg.) (2014). Mathematische Probleme lösen lernen. Vorträge auf dem gleichnamigen Symposium am 27. & 28. September 2013 an der Technischen Universität Braunschweig. Münster: WTM.

Bruder, R., Collet, Ch. (2011). Problemösen lernen im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen

Bruder R. (2003). Methoden und Techniken des Problemlösenlernens. Material im Rahmen des BLK-Programms «SINUS» zur «Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts». Kiel: IPN